

1 Einführung

1.1 ZahlenmengenS1

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \text{natürliche}(+0)$;

$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } (q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\} \Rightarrow \text{rational}$; $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \text{irrational}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow \text{ganze}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \sqrt{2}, \pi, \phi \Rightarrow \text{reelle}$

1.2 MengenlehreS335

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Schnittmenge:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2\}$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

$$A \setminus B = \{-2, -1\}$$

Produktmenge:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Kommutativgesetz:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetz:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetz:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.3 BeweismethodenS5

1.4 Spezielle UngleichungenS31

Bernoulli-Ungleichung: $(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \leq |a| + |b|$ $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Harmonisches, Geometrisches und arithmetisches Mittel S20,21:

$$\text{für } a_i \geq 0, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, n\} : \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right]^{-1} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Minima/Maxima: $\min\{a_i\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \max\{a_i\}$

Betragsungleichung: $-c < x < c \Leftrightarrow |x| < c$

1.5 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a.

Schreibweise: $U(a)$

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ -Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Schreibweise: $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ -Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ -Umgebung von a genannt.

Schreibweise: $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.6 SummenzeichenS6

mit $1 \leq m \leq n$

Die Laufvariable i wird immer um 1 aufaddiert. i immer kleiner-gleich n (z.B. wenn $i \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i; \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1-j}^{n-j} a_{i+j}; \quad \sum_{i=1}^n a = n \cdot a; \quad \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \beta b_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i$$

1.7 Spezielle endliche ReihenS20

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.8 ProduktzeichenS7

$$a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

1.9 FakultätS13

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$\text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

$$n! > 2^{n-1}$$

1.10 Binomischer SatzS12

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

1.11 Einige Wurzeln

$$\sqrt{2} = 1.414; \quad \sqrt{3} = 1.732; \quad \sqrt{5} = 2.236; \quad \sqrt{6} = 2.449; \quad \sqrt{7} = 2.645; \quad \sqrt{8} = 2.828;$$

2 FunktionenS49

2.1 Einleitung

Schreibweisen:

$f : D_f \rightarrow W_f$ mit $x \mapsto f(x)$

$f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$

$y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Achsenbezeichnungen:

Abszisse = X-Achse

Ordinate = Y-Achse

Applikate = Z-Achse

Definitionen:

$x \Rightarrow$ Argument oder Variable von f

$f(x) \Rightarrow$ Funktionswert, Wert von f an der Stelle x

$x \mapsto f(x)$ oder $y = f(x) \Rightarrow$ Zuordnungsvorschrift

$D_f \Rightarrow$ Definitionsmenge oder Definitionsbereich

$W_f \Rightarrow$ Wertemenge oder Wertebereich

2.2 Transformationen

$$\pm \mathbf{a} \cdot f(\pm \mathbf{b}x \pm \mathbf{c}) \pm \mathbf{d}$$

1.schieben 2.stecken

1. **a** Vertikale (y-Richtung) Streckung um **a** bzw. Spiegelung an x bei **-a**
2. **b** Horizontale (x-Richtung) Streckung um **1/b** bzw. Spiegelung an y bei **-b**
3. **c** Verschiebung nach links (+c) oder rechts (-c) (vertikale Verschiebung)
4. **d** Verschiebung nach oben (+d) oder unten (-d) (horizontale Verschiebung)

$$\pm \mathbf{a} \cdot f(\pm \mathbf{b}(x \pm \mathbf{c})) \pm \mathbf{d}$$

1.strecken 2.schieben

2.2.1 Spiegelung

an X-Achse: Polarität von f ändern

an Y-Achse: Polarität von x ändern

2.3 Spezielle Funktionen

Identität:

Schreibweise: $f(x) = x$

Definition:

Der X-Wert ist gleich dem Y-Wert

Signumfunktion:

Schreibweise: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

$$\text{Definiton: } y = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Gauss-Klammer (floor):

Schreibweise: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Definition:

rundet den Y-Wert ganzzahlig ab

2.4 Umkehrfunktion **S53**

Schreibweise: f^{-1} Definition: ein Y-Wert darf nur einmal vorkommen und W_f muss $\in D_f$ sein

Ist eine Funktion f auf einem Intervall D streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion $f^{-1} \Rightarrow x$ und y vertauschen und nach y auflösen. Restriktion vorhanden (D einschränken)

2.5 Verkettung oder mittelbare Funktion

Schreibweise: $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$
 $h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$

Sprechweise: g nach f
 f nach g

Wertebereiche: $W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$
 $W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

Wichtig: Funktionen sind nacheinander ausführbar, wenn der $W_f \subset D_g$ bzw. $W_g \subset D_f$ ist.

2.6 Beschränktheit **S52**

2.7 Monotonie **S51**

monoton wachsend $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton wachsend $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

streng monoton fallend $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.8 Gerade/Ungerade Funktionen **S52**

Funktion ist **gerade** wenn $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrisch $\Rightarrow$ an y-Achse gespiegelt

Funktion ist **ungerade** wenn $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch

Funktion ist **periodisch** wenn $f(x) = f(x \pm p) \Rightarrow$ wiederholt sich im Abstand p für beide gilt: $\underbrace{x \in D_f \wedge -x \in D_f}_{D_f \text{ ist symmetrisch}}$

Wichtig: Um zu beweisen das eine Funktion gerade bzw. ungerade ist, zeigt man indem man beweist, dass es für einen Punkt nicht stimmt!

2.9 Ganzrationale Funktionen (Polynom) **S63,65**

Aussehen:

Nullstellen bestimmen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- falls Polynom ($ax^2 + bx + c$) quadratische Lösungsformel: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- faktorisieren mit Hilfe von Binomen
- faktorisieren mit Hilfe des **Hornerschemas **S966****

Wichtig: eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen

2.10 Horner Schema **S966**

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation

- Zahlen pro Spalte werden addiert

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x_1 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ & & b_{n-1}x_1 & b_{n-2}x_1 & \dots & b_1x_1 & b_0x_1 \\ \hline & & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden, durch **ausprobieren!!**)

oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

Ergebnis der Form: $f(x) = (x - x_1)g(x) + f(x_1)$

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 67x - 126$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$$

Linearfaktor: $(x - x_1)$

Polynom vom Grad $n - 1$: $g(x)$

2.11 Gebrochenrationale Funktionen **S63,67**

Aussehen:

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Definitionen:

- wenn $m < n$ ist f **echt gebrochen** ($\Rightarrow$ zerlegen), wenn $m \geq n$ ist f **unecht gebrochen**
- x_1 ist **Nullstelle** von f falls $p_m(x_1) = 0$ und $q_n(x_1) \neq 0$ gilt $\rightarrow$ k-fache Nullstelle
- x_1 heisst **Polstelle** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) \neq 0$ gilt $\rightarrow$ k-fache Polstelle
- x_1 heisst **Lücke** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) = 0$ gilt.
- Jede **unecht gebrochen** rationale Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben. Dies ist möglich mit der **Polynomdivision** **S15**

2.12 Partialbruchzerlegung **S15**

$$f(x) = \frac{-x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Nenner faktorisieren mit} \\ \text{Horner Schema } \text{S965, Binom} \end{array} \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2 + 2x - 15) = (x+2)(x+5)(x-3)$$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem (**Zähler gleichsetzen**) aufstellen mit beliebigen x_i -Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$x_1 = 3 : -9 + 60 + 149 = A \cdot 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 5$$

$$x_2 = -2 : -4 - 40 + 149 = B \cdot (-5) \cdot 3 \Rightarrow B = -7 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} - \frac{7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$$

$$x_3 = -5 : -25 - 100 + 149 = C \cdot (-8) \cdot (-3) \Rightarrow C = 1$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen: (Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.)

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

2.13 Trigonometrische Funktionen **S77ff** Arcus **S86**

$$\sin : D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow W_f = [-1, 1]$$

$$\arcsin : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : D_f = [0, \pi] \rightarrow W_f = [-1, 1]$$

$$\arccos : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [0, \pi]$$

$$\tan : D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

$$\arctan : D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot : D_f = (0, \pi) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arccot} : D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = (0, \pi)$$

Orthogonalitätsbedingung: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Achtung: Winkel können auch x-faches von π sein! Periodizität beachten! Siehe Bronstein **S80,87**

2.14 Schwingungen **S84**

2.15 Potenz- und Wurzelfunktionen **S8,72**

gerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$ ungerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

gerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$ ungerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

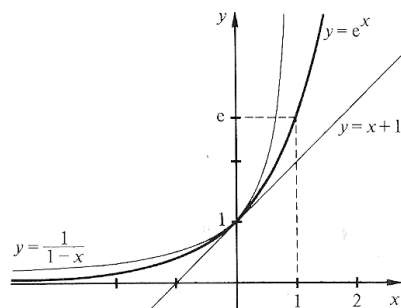
2.16 Hyperbolische Funktionen **S89** Areahyperbolicus **S93**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; D = \mathbb{R}, W = [1, \infty)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; D = \mathbb{R}, W = (-1, 1)$$

2.17 Logarithmus- und e-Funktion **S9,73**

e-Funktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$

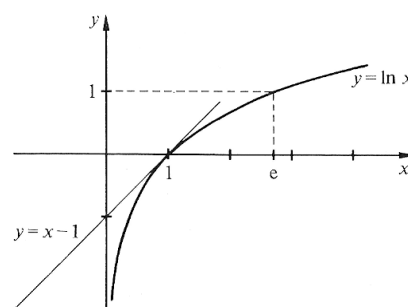


$$e^x \geq 1 + x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für } x < 1$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Logarithmus-Funktion: $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$



$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

2.18 $\varepsilon - M$ - Kriterium**S53???** **2.19 $\varepsilon - \delta$ - Kriterium****S53????**
 $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x \geq M(\varepsilon)$ $|f(x) - g| < \varepsilon$
 $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ für $x \rightarrow x_0$

2.20 K-Kriterium**S54????**
 $f(x) > K$ für $x > M$, $K \in \mathbb{R}$
 $f(x) < k$ für $x < m$, $k \in \mathbb{R}$

3 Zahlenfolgen

S19,470

3.1 Einführung

S19

arithmetische Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{\text{Differenz}}$$

$$q = \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\text{Quotient}}$$

geometrische Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = q * a_n$$

konstante Folge:

$$a_1 = c \text{ und } a_{n+1} = c$$

Monotonie			
$d \geq 0$	$q \geq 1$	monoton wachsend	$\uparrow$
$d > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend	$\uparrow\uparrow$
$d \leq 0$	$0 < q \leq 1$	monoton fallend	$\downarrow$
$d < 0$	$0 < q < 1$	streng monoton fallend	$\downarrow\downarrow$

3.2 Beschränktheit

S51,470

Beschränkt wenn $k \leq a_n \leq K$, wobei k bzw. K die untere bzw. obere Schranke ist

3.2.1 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.

3.3 Grenzwertsätze

S470

3.4 Grenzwerte von rekursiven Folgen

1. Hypothetischer Grenzwert ausrechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a \quad \text{z.B. } \sqrt{a_n} + 1 = a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a} + 1 = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Möglicher Grenzwert} \rightarrow \text{wenn Folge beschränkt und monoton}$$

2. Beschränktheit mittels des hypothetischen Grenzwertes

$\Rightarrow$ mit vollständiger Induktion beweisen (Auch mit Ungleichungen lösbar)

$$\text{z.B. Induktionsanfang } A(1): \quad a_1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \Rightarrow 1 < 3$$

$$\text{Induktionsschritt } A(n+1): \quad a_n < 3$$

$$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \sqrt{3} + 1 < 3$$

$$|\sqrt{\dots}| + 1$$

3. Monotonie annehmen (ev. erste Glieder berechnen)

$\Rightarrow$ mit vollständiger Induktion beweisen (Auch mit q/d-Kriterium oder Ungleichungen lösbar)

$$\text{z.B. Induktionsanfang } A(1): \quad a_1 < a_2 \Rightarrow 1 < 2$$

$$\text{Induktionsschritt } A(n+1): \quad a_n < a_{n+1}$$

$$\underbrace{\sqrt{a_n} + 1}_{a_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{a_{n+1}} + 1}_{a_{n+2}}$$

$$|\sqrt{\dots}| + 1$$

4. Grenzwert bestimmen

$\Rightarrow$ Aus 2. und 3. folgt das $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow$ Da Folge nach oben beschränkt und streng monoton wachsend

3.5 $\varepsilon - n_0$ - Kriterium

S470

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon)$$

4 Grenzwerte von Funktionen

S54

4.1 Berechnung von Grenzwerten

S56

Technik des *Erweiterns*: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ Erweitern mit $\frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\text{Binomische Formel: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

4.1.1 Spezielle Grenzwert Sätze

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |g|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n = g^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{g}$$

4.1.2 Einschliessungsprinzip

S56

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \wedge a_n, b_n \text{ sind konvergent}$$

$$a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$$

4.2 Links-/Rechtsseitiger Grenzwert S55

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = g^+$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = g^-$

4.3 Konvergenz, Divergenz S472

Konvergenz: $g^+ = g^- = g \in \mathbb{R}$ oder: monoton und beschränkt

Bestimmte Divergenz: $g = +\infty$ oder: $g = -\infty$

Unbestimmte Divergenz: Es existiert kein Grenzwert

(g für Grenzwert)

4.4 Stetigkeit S59

„Wenn man die Funktion mit einem Strich zeichnen kann“:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
Hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0 , aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

4.5 Übertragungsprinzip

f besitzt genau an der Stelle x_0 den Grenzwert g , wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

Bsp: $f(x) = x - [x]$ und $x_0 = -1$ $x_n = -1 - \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -1$ $x'_n = -1 + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n) = -1$

wenn nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 - \frac{1}{n} - [-1 - \frac{1}{n}]) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + \frac{1}{n} - [-1 + \frac{1}{n}]) = 0$$

Dann besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 keinen Grenzwert g .

4.6 Spezielle Grenzwerte S58???

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \quad (a > 1; \alpha, \beta > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}} = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{q^x} = 0 \quad (q > 1; k \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{p} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

4.7 Rechenregeln mit uneigentlichen Grenzwerten $\pm\infty$

Die eigentlichen (reellen) Größen wie 0, 1, oder $g \in \mathbb{R}$ bzw. uneigentlichen Größen $\pm\infty$ sind als Grenzwerte bzw. als bestimmtes Divergenzverhalten von Funktionen zu interpretieren.

4.7.1 bestimmte Formen

für $g \in \mathbb{R}$

für $g \in \mathbb{R}$

für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$

für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$

für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty +} = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$g + \infty = \infty$$

$$\frac{g}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty -} = -\infty$$

$$-\infty \cdot (\infty) = -\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{\infty}{0+} = 0$$

$$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$g - \infty = -\infty$$

$$\frac{\infty}{0-} = 0$$

$$\frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$$

4.7.2 unbestimmte Formen

Für die folgenden Formen gibt es keine allgemeinen Regeln; das Grenzverhalten ist abhängig von den beteiligten Funktionen und mittels speziellen Methoden (bsp. Bernoulli-de l'Hospital) zu überprüfen bzw. zu berechnen.

$$\frac{0}{0} = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$0 \cdot \infty = ?$$

$$1^\infty = ? \quad (\text{wenn kein lim ist, daher konstant} \Rightarrow \text{OK})$$

$$\infty - \infty = ?$$

$$0^0 = ?$$

$$\infty^0 = ?$$

4.8 Asymptotenbestimmung S15??, 260

Ausrechnen der Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $r: x \mapsto r(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) =$	$m < n$ 0	$m = n$ $\frac{a_m}{b_n}$	$m > n$ $+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Ganzrationaler Teil der Polynomdivision S15

5 Differentialrechnung S444

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{d}{dx} f \right)_{x=x_0} = Df(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ und } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

f^{-1} ist differenzierbar wenn: f differenzierbar und umkehrbar ist und wenn $f'(x) \neq 0$ ist.

Rechtsseitige $f'_r(x_0)$ bzw. linksseitige $f'_l(x_0)$ Ableitung.

Falls $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ und f an der Stelle x_0 stetig, dann ist f an der Stelle x_0 **differenzierbar**. $\Rightarrow$ sonst: **unbestimmt divergent** und **Ableitung existiert nicht**.

5.1 Ableitungsregeln S445, 450

5.2 Einige Ableitungen S445

$$\begin{aligned} (|x|)' &= \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}, x \neq 0 & (\tan x)' &= 1 + \tan^2 x, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \right\} & (\cot x)' &= -(1 + \cot^2 x), x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \\ \ln(|x|)' &= \frac{1}{x} & (\tanh x)' &= 1 - \tanh^2 x & (\coth x)' &= 1 - \coth^2 x \end{aligned}$$

5.3 Höhere Ableitungen S451

$$(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}_0$$

$$(\cos x)^{(2k-1)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{(n)} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

$$(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x, k \in \mathbb{N}$$

$$(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, k \in \mathbb{N}$$

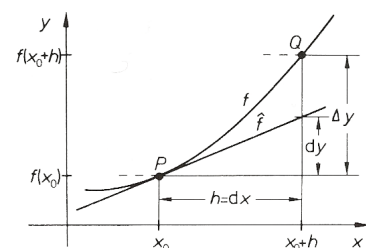
$$(\sqrt{x})^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n x^{n-1} \sqrt{x}}$$

$$(x \cdot e^x)^{(n)} = n \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(n+x)$$

5.4 Tangentengleichung

$$\hat{f}(x) = \underbrace{(x - x_0)}_{dx} \cdot f'(x_0) + f(x_0) \quad (x_0 = \text{Entwicklungspunkt})$$

5.5 Differential, Fehlerrechnung S862, 869



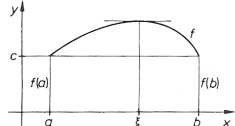
$$\text{absoluter Fehler: } |\Delta y| \approx |dy| = |f'(\bar{x})| \cdot |dx| \leq |f'(\bar{x})| \cdot |\delta|$$

$$\text{relativer Fehler: } |\Delta y| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot |dx| \leq \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot |\delta| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot |\delta|$$

$$\left| \frac{dx}{x} \right| \hat{=} \text{relative Fehler Input} \quad \left| \frac{dy}{y} \right| \hat{=} \text{relative Fehler Output} \quad \text{Einheit} = [1]$$

Auf n-Stellen nach dem Komma genau $\Rightarrow$ absoluter Fehler: $\delta = \pm 0.5 \cdot 10^{-n}$

5.6 Mittelwertsatz S454



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$\xi = a + \delta(b - a)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \delta h)$$

$$f(x+h) = h \cdot f'(x + \delta h) + f(x)$$

$$\xi = x + \delta h \quad 0 < \delta < 1$$

5.7 Taylor Polynom S455, 484

$$(x_0 = \text{Entwicklungspunkt}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0, h)$$

$$h = x - x_0$$

$$R_n(\text{Lagrange}): R_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, (0 < \delta < 1); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0, h) = 0 \Rightarrow f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

$$\text{MacLaurinsche-Form (gilt für } x_0 = 0, h = x): f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n; \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\delta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0 < \delta < 1);$$

5.7.1 Einige Reihen S20, 477, 1074

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overbrace{(-1)^n \cdot \frac{\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}^{R_n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5.8 Bernoulli-de l'Hospital S57

$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}$, dies gilt für: „ $\frac{0}{0}$ “ 1. Regel, oder „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “ 2. Regel; Zähler und Nenner separat ableiten!

5.8.1 Spezialfälle

$$0 \cdot \pm\infty \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\infty - \infty \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_1 \cdot f_2}}$$

$$f^g : \begin{Bmatrix} 1^\infty \\ 0^0 \\ \infty^0 \end{Bmatrix} = e^{g \cdot \ln(f)} = \begin{Bmatrix} e^{\infty \cdot 0} \\ e^{0 \cdot -\infty} \\ e^{0 \cdot \infty} \end{Bmatrix}$$

5.9 Kurvenuntersuchungen S261

1. Definitionsbereich S49 D_f und Abschätzung des Wertebereichs W_f , wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und Periodizität S53
3. Nullstellen
4. Stetigkeit S59 und Differenzierbarkeit S444 (Berechnung der Ableitungen)
5. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, Krümmungsverhalten S51
6. Grenzwertaussagen (Asymptote, Pole, Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs)

5.9.1 Monotonie S453

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
≥ 0					monoton wachsend
> 0					streng monoton wachsend
≤ 0					monoton fallend
< 0					streng monoton fallend
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	> 0	streng monoton wachsend (falls n ungerade)
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	< 0	streng monoton fallend (falls n ungerade)

5.9.2 Extremstelle S455

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
$= 0$	> 0				relatives Minimum, Randstellen beachten
$= 0$	< 0				relatives Maximum, Randstellen beachten
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	> 0	relatives Minimum (falls n gerade), Randstellen beachten
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\dots = 0$	< 0	relatives Maximum (falls n gerade), Randstellen beachten

Zweite Variante Falls bei $f'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremstelle

5.9.3 Konvexität - Krümmungsverhalten S253

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

5.9.4 Wendepunkte (Terrassenpunkt) S256

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n)}$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terrassen- oder Sattelpunkt

Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt

5.9.5 Asymptote S260

Die Asymptote existiert nur wenn alle **drei eigentlichen Grenzwerte existieren**. Für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind, kann die Asymptote wie folgt bestimmt werden.

$$\text{Asymptote } g : y = ax + b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oder } a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

zweite Variante gilt jedoch nur wenn in der ersten Formel die Bedingung für Bernoulli-de l'Hospital erfüllt sind.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

Dies alles gilt sinngemäss auch für $x \rightarrow -\infty$

Spezialfall: Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert, so ist $a = 0$ und $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5.10 Schnittwinkel von zwei Funktionen

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch ausprobieren herausfinden (Bereich von $-3 \dots 3$)
4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
6. Schnittwinkel mit Hilfe dieser Gleichung berechnen: $\tan(\sigma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

5.10.1 Normale

Wenn eine Normale zur Tangente berechnet werden muss gilt: $m_1 * m_2 = -1$

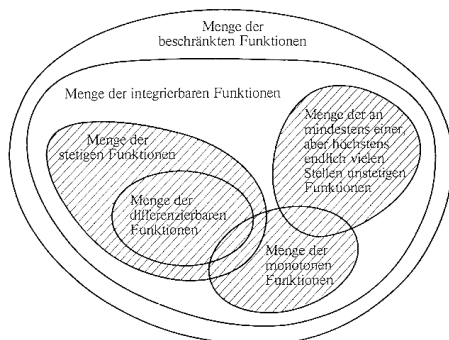
6 Integralrechnung S493

6.1 Bestimmtes Integral S506

$$I = \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} S(Z) = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} O(Z) = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} U(Z)$$

x : Integrationsveränderliche, f : Integranden, $[a, b]$: Integrationsintervall, a/b : untere bzw. obere Integrationsgrenze

6.2 Integrierbarkeit



Schranken vom Integral:

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) \\ \int_a^b g_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq \int_a^b g_2(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

6.3 Integralregeln S494

$$\int_a^b \tilde{x}^n d\tilde{x} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

6.4 Flächeninhalt S508

Inhalt der Fläche unter dem Graphen f : $A = \int_a^b |f(\tilde{x})| d\tilde{x}$

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f_1(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_a^b f_2(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{gilt auch wenn die Funktionen } f_1 \text{ oder } f_2 \text{ negativ werden.}$$

6.5 Mittelwertsatz S510

f auf $[a, b]$ stetig $\Rightarrow$ mind. eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = (b-a)f(\xi) \Rightarrow h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x}$

$h \hat{=}$ Mittelwert der Funktion

6.6 Integralfunktion

$c \in [a, b]$ und $f(x)$ über $[a, b]$ integrierbar: $I: x \mapsto I(x) = \int_c^x f(\tilde{t}) d\tilde{t}$

6.6.1 Differenzierbarkeit S509

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(\tilde{t}) d\tilde{t} = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(\tilde{t}) d\tilde{t} = f(x)$$

6.7 Unbestimmtes Integral S493

$$F(x) + C = \int f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

6.8 Stammfunktion S493

Jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion F nennt man Stammfunktion, wenn $F' = f$.

$$I(x) \subset F(x)$$

6.9 Rechenregeln S496

$$\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(b) - F(a)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(\tilde{x})| d\tilde{x}$$

$$\int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^a f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} - (-1) \cdot \int_a^0 f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$