

Formelsammlung HSR

Thomas Küng
tkueng@hsr.ch

Urs Winiger
uwiniger@hsr.ch

Adrian Freihofer
afreihof@hsr.ch

Version 1.01
28. April 2003

Vorwort

Die vorliegende Formelsammlung wurde während dem Studium für Elektrotechnik an der Fachhochschule in Rapperswil geschrieben. Ziel war es, den Inhalt an den Prüfungsstoff anzupassen, aber auch ein Werk zu schreiben, das wir später im Berufsleben verwenden können. Obwohl wir den Inhalt sorgfältig zusammengestellt haben, sind Fehler nicht ausschliessbar. Für jegliche Korrektur- oder Verbesserungsvorschläge haben wir immer ein offenes Ohr!

In der Formelsammlung sind die folgenden Fächer enthalten:

- Physik
- Elektrizitätslehre
- Energie und Antriebstechnik
- Elektronik
- Digitale Signalverarbeitung
- Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
I Physik	1
1 Geometrische Optik	2
1.1 Sichtbares Licht	2
1.2 Reflexionsgesetz	2
1.3 Brechung	2
1.4 Totalreflexion	3
1.4.1 Prisma	3
1.4.2 Lichtwellenleiter	3
1.5 Abbildungen	4
1.5.1 Allgemein	4
1.5.2 Spiegel	4
1.5.3 Abbildungen durch Spiegel	5
1.5.4 Linsen	6
1.5.5 Abbildungen durch Linsen	6
1.5.6 Optische Geräte	7
2 Statik	11
2.1 Starre Körper im Gleichgewicht	11
2.1.1 Gleichgewichtsbedingung starrer Körper	11
2.1.2 Haftreibung	11
2.1.3 Reaktionsprinzip	12
2.1.4 Drehmoment	12
2.2 Schwerpunkt	13
2.3 Deformierung	13
2.3.1 Spannung	13
2.3.2 Dehnung	13
2.3.3 Querkontraktion	14
2.3.4 Kompression	14
2.3.5 Schubbeanspruchung	14
2.3.6 Schraubenfeder	14
2.3.7 Biegung eines Balkens	15
2.4 Vorgehen beim Lösen von Statikaufgaben	15
3 Kinematik	16

3.1	Gleichförmige Bewegung	16
3.2	Gleichförmig beschleunigte Bewegung	16
3.3	Drehbewegung	17
3.3.1	Gleichförmige Kreisbewegung	17
3.3.2	Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung	17
3.3.3	Zentripetalbeschleunigung	18
3.4	Wurfbahnen	18
3.4.1	Freier Fall	18
3.4.2	Senkrechter Wurf	18
3.4.3	Horizontaler Wurf	19
3.4.4	Schiefer Wurf	19
4	Dynamik	20
4.1	Newtonsche Gesetze	20
4.1.1	Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)	20
4.1.2	Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsgesetz)	20
4.1.3	Drittes Newtonsches Gesetz (Actio = Reactio)	20
4.1.4	Allgemeines Vorgehen beim lösen von Bewegungsproblemen	20
4.2	Masse und Gewicht	21
4.2.1	Spezielle Kräfte, Masse, Dichte und Reibung	21
4.3	Arbeit und Energie, Energieerhaltung	21
4.3.1	Hubarbeit, Potentielle Energie	22
4.3.2	Spannarbeit, Spannenergie	22
4.3.3	Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie	22
4.3.4	Rotationsenergie	22
4.3.5	Reibungsarbeit	23
4.3.6	Verformungsarbeit	23
4.3.7	Einstein, Kernbindungsenergie	23
4.4	Leistung	23
4.5	Wirkungsgrad	24
4.6	Impuls, Impulserhaltung	24
4.6.1	Drehimpuls	24
4.6.2	Raketenantrieb	25
4.6.3	Inelastischer Stoss	25
4.6.4	Elastischer Stoss	25
4.7	Analogie Translation und Rotation	26
4.8	Gravitation und Masse	27
4.8.1	Keplersche Gesetze (→ Bewegung der Planeten)	27
4.8.2	Newtonsches Gravitationsgesetz	27
4.8.3	Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse	28
4.8.4	Fluchtgeschwindigkeit	28
4.8.5	Geostationäre Bahn	28
4.9	Rotation und Massenträgheitsmoment	29
4.9.1	Massenträgheitsmoment bei Getriebe	29
4.9.2	Massenträgheitsmomente oft verwendeter Körper	30
5	Mechanik deformierbarer Körper	31
5.1	Druck	31

5.1.1	Absoluter Druck Überdruck	31
5.2	Kompression	31
5.3	Hydrostatik	32
5.3.1	Schweredruck	32
5.3.2	Statischer Auftrieb	32
5.3.3	Druckwandler	32
5.3.4	Kraftwandler	32
5.3.5	Druckmessung	33
5.3.6	Grenzflächeneffekte	34
5.4	Hydrodynamik	36
5.4.1	Kontinuitätsgleichung	36
5.4.2	Bernoulli Gleichung (Energieerhaltung)	36
5.5	Reale Strömung	37
5.5.1	Zirkulation	37
5.5.2	Vortizität	37
5.5.3	Newtonsches Reibungsgesetz	37
5.6	Strömungsformen	37
5.6.1	Raynolds-Zahl	37
5.6.2	Laminare Strömung ($Re < 2320$)	38
5.6.3	Volumenstrom	38
5.6.4	Turbulente Strömung ($Re > 2320$)	39
5.7	Dynamischer Auftrieb	39
5.7.1	Tragflügel	40
6	Wärmelehre	41
6.1	Temperatur	41
6.2	Ausdehnung von Materialien	41
6.3	Ideale Gase	42
6.4	Gemische idealer Gase	42
6.5	Reale Gase	43
6.6	Wärme	43
6.6.1	Molare Wärme kristalliner Festkörper	44
6.6.2	Austausch von Wärmemengen	44
6.7	Phasen und Phasenübergänge	44
6.7.1	Schmelz- und Verdampfungsenergien	45
6.8	Luftfeuchtigkeit	45
6.9	Kinetische Gastheorie	46
6.9.1	Mittlere freie Weglänge, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität	47
6.9.2	Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung	47
6.10	Temperaturstrahlung, Strahlungsgesetze	48
6.10.1	Strahlungsaustausch	49
6.11	Wärmetransport	50
6.12	Zustandsänderungen	51
6.12.1	Isobare Zustandsänderung	51
6.12.2	Isochore Zustandsänderungen	51
6.12.3	Isotherme Zustandsänderungen	51
6.12.4	Adiabatische Zustandsänderungen	52
6.12.5	Expansion und Kompression	52

6.12.6	Enthalpie	53
6.13	Kreisprozesse	53
6.13.1	Carnotprozess	54
6.14	Entropie	55
7	Schwingungen	56
7.1	Freie Schwingungen	56
7.1.1	Ungedämpfte, harmonische Schwingung	56
7.1.2	Ungedämpfte, periodische Schwingung	57
7.1.3	Ungedämpfte, nicht periodische Schwingung	57
7.1.4	Federpendel	58
7.1.5	Drehpendel	58
7.1.6	Mathematisches Pendel	59
7.1.7	Physikalisches Pendel	59
7.1.8	Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibung	60
7.1.9	Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ($D < 1$)	60
7.1.10	Aperiodeische Lösung ($D > 1$)	61
7.1.11	Elektrischer Schwingkreis	61
8	Wellenlehre	62
8.1	Wellengeschwindigkeiten	62
8.1.1	Zusammenhänge der verschiedenen Wellen	63
8.2	Wellengleichung	63
8.3	Intensität	63
8.4	Harmonische Wellen	64
8.5	Räumliche Ausbreitung von Wellen	64
8.6	Doppler-Effekt	65
8.6.1	Akustischer Doppler-Effekt	65
8.6.2	Optischer Doppler-Effekt	65
8.6.3	Machscher Kegel	66
8.7	Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz	66
8.8	Optische Länge	67
8.9	Stehende Wellen	67
8.10	Eigenschwingungen	68
8.10.1	Saite	68
8.10.2	Pfeife	68
8.10.3	Rechteckige Membrane	69
8.11	Beugung	69
8.11.1	Beugung am Spalt	69
8.11.2	Beugung an kreisförmiger Öffnung	69
8.11.3	Beugung am Gitter	70
II	Elektrizitätslehre	71
9	Grundlagen	72
9.1	Grundgrößen	72
9.2	Netzwerke bei Gleichstrom	74

9.2.1	Kirchhoffsche Gesetze	74
9.3	Reale Quellen	74
9.3.1	Reale Spannungsquelle	74
9.3.2	Reale Stromquelle	75
9.4	Netzwerkanalyse	75
9.4.1	Netzwerkumwandlung	75
9.4.2	Wirkungsgrad und Leistungsanpassung	77
9.4.3	Systematische Analyse linearer Netzwerke	77
9.4.4	Quellenverschiebung	78
9.4.5	Netzwerke mit gesteuerten Quellen	79
10	Das elektrische Strömungsfeld	80
10.1	Allgemein	80
10.2	Spezielle Felder	80
10.2.1	Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)	80
10.2.2	Zylindrisches Zentralfeld	81
10.2.3	Leistung und räumliche Leistungsdichte	81
11	Elektrostatik	82
11.1	Das Coulombsche Gesetz	82
11.2	Das elektrostatische Feld (Allgemein)	82
11.3	Spezielle Felder	83
11.3.1	Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)	83
11.3.2	Zylindrisches Zentralfeld	84
11.3.3	Homogenes Feld (Plattenkondensator)	84
11.3.4	Paralleldrahtleitung	85
11.4	Energie im elektrischen Feld	85
11.5	Kräfte im elektrischen Feld	85
11.5.1	Allgemein	85
11.5.2	Verschiebung	86
11.5.3	Anziehung	86
12	Magnetismus	87
12.1	Feldstärke	87
12.2	Permeabilität	87
12.3	Magnetische Flussdichte	88
12.4	Kräfte im Magnetischen Feld	88
12.4.1	Kräfte auf Ladungen	88
12.4.2	Kraft auf Leiter im B -Feld	89
12.4.3	Kräfte auf parallele Leiter	89
12.4.4	Kräfte auf Randflächen eines Feldes	89
12.5	Durchflutung	90
12.6	Magnetischer Fluss	90
12.7	Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises	91
12.8	Spulenfluss	91
12.9	Induktivität	91
12.10	Gegeninduktivität und induktive Kopplung	92
12.11	Brechung magnetischer Feldlinien	92

12.12	Räumliche Energiedichte	93
12.13	Energie im magnetischen Feld	93
12.14	Induktionsgesetz	94
12.15	Selbstinduktion	94
12.16	Serie- und Parallelschaltung von Induktivitäten	95
12.17	Trafogleichungen	95
12.18	Nichtlinearität	96
12.18.1	$B(H)$ -Kurve in $\Phi(\Theta)$ -Kurve umrechnen	96
12.18.2	Luftspaltkennwert α	96
12.19	Spezielle Anordnungen	97
12.19.1	Langer gerader Leiter $l \gg d$	97
12.19.2	Kurzer, gerader Leiter	97
12.19.3	Kreisförmige Drahtschleife	98
12.19.4	Voller Leiter	98
12.19.5	Koaxialkabel	99
12.19.6	Paralleldrahtleitung	99
12.19.7	Zylinderspule	100
12.19.8	Ringspule (Toroid)	101
12.19.9	Kreisrahmenspule	101
13	Wechselstromlehre	102
13.1	Mittel- und Kennwerte	102
13.1.1	Linearer Mittelwert	102
13.1.2	Betragsmittelwert	102
13.1.3	Halbwellenmittelwert	102
13.1.4	Quadratischer Mittelwert (Effektivwert, RMS)	103
13.1.5	Scheitelfaktor (Crestfaktor)	103
13.1.6	Formfaktor	103
13.1.7	Effektivwert eines zusammengesetzten, mehrfrequenten Signals	103
13.2	Leistung	104
13.2.1	Leistung und Leistungsanpassung bei Quellen	104
13.2.2	Effektivwert und Leistung	104
13.3	Energie	105
13.4	Komplexe Darstellung sinusförmiger Vorgänge	105
13.5	Komplexe Darstellung von Impedanz und Admittanz	106
13.6	Klemmgrößen von Schaltelementen	106
13.6.1	Allgemein	106
13.6.2	Ohm'sche Widerstände	107
13.6.3	Kapazitäten	107
13.6.4	Induktivitäten	108
13.7	Zeigerdarstellung Komplexer Klemmgrößen	109
13.7.1	Impedanztransformation	110
13.7.2	Transformation von Z-Ebene zu Y-Ebene	110
13.8	Netzwerkanalyse	111
13.8.1	Maschenmethode / Kreisstrommethode	111
13.8.2	Trennbündelmethode / Knotenspannungsmethode	111
13.9	Darstellungsformen	112
13.9.1	Beispiel: Nyquistdiagramm, Ortskurve	112

13.9.2 Bodediagramm	112
13.9.3 Pol- Nullstellendiagramm	116
13.10Eigenschaften des PT_1 -Glied	117
13.11Eigenschaften des PT_2 -Glied	117
13.12Verkpfung von Blockdiagrammen	118
III Energie und Antriebstechnik	119
14 Dreiphasensysteme	120
14.1 Sternschaltung	120
14.2 Dreieckschaltung	121
14.2.1 Leistungen bei Stern- und Dreieckschaltung	121
15 Elektromotoren und Generatoren	122
15.1 Allgemein	122
15.2 Gleichstrommaschine	123
15.2.1 Fremderregte Gleichstrommaschine (GNSM)	123
15.2.2 Nutzbremmung mit fremderregter Gleichstrommaschine	124
15.3 Gleichstrom Nebenschlussmaschine (GNSM)	124
15.4 Gleichstrom Reihenschlussmaschine (GRSM)	125
15.5 Drehstrom Synchrongenerator (DSG)	126
15.6 DSG im Inselbetrieb	126
15.7 Belastung des DSG am starren Netz	127
15.8 Drehmoment und Stabilität des DSG am starren Netz	127
IV Elektronik	128
16 Diode	129
16.1 Ideale Diode	129
16.2 Konstantspannungsmodell	129
16.3 Arbeitspunktberechnung	129
16.4 Kennlinie	130
16.4.1 Differentieller Widerstand	130
16.5 DC- und AC-Analyse von Diodenschaltungen	131
16.5.1 Vorgehen	131
16.5.2 Kleinsignalanalyse	131
16.5.3 Grosssignalanalyse	131
16.6 Z-Dioden	132
16.6.1 Z-Dioden zur Spannungsstabilisierung	132
17 Bipolar Transistor	133
17.1 NPN- und PNP-Transistor	133
17.2 Der ideale Transistor bei Gleichspannung	134
17.2.1 DC-Ersatzschaltung	134
17.3 Verstärkerschaltungen	134
17.3.1 Dynamische Innenwiderstände des Transistors	134

17.3.2	Emitterschaltug	135
17.3.3	Basisschaltung	136
17.3.4	Kollektorschaltung (Emitterfolger)	136
18	Feldeffekt Transistor	137
18.1	Verschiedene Typen	137
18.2	Der ideale MOSFET (Handrechnung)	138
18.3	Der reale MOSFET	139
18.4	Kleinsignal Ersatzschaltbild für tiefe Frequenzen	140
18.5	DC-Berechnung mit idealen MOSFET Gleichungen	141
18.6	Der FET als Schalter	142
18.7	Des FET als AC-Verstärker	143
18.7.1	Sourceschaltung	143
18.7.2	Gateschaltung	144
18.7.3	Drainschaltung	144
18.8	Dynamische Innenwiderstände des MOS-Transistors	145
18.9	Der FET als Spannungsgesteuerter Widerstand	145
18.10	MOS-Diode	146
18.11	Stromquellen	147
18.11.1	Einfache Stromquelle	147
18.11.2	Stromquelle mit Kaskode-Schaltung	147
18.11.3	Stromquelle mit geregelter Kaskode-Schaltung	148
18.12	Stromspiegel	148
18.12.1	Widlar Stromspiegel	148
19	Operationsverstärker	149
19.1	Verstärkung	149
19.2	Idealer OP	149
19.2.1	Invertierender Verstärker	150
19.2.2	Nichtinvertierender Verstärker	150
19.2.3	Addierer	150
19.2.4	Subtrahierer	151
19.2.5	Mehrfach Addierer und Subtrahierer	151
19.2.6	Instrumentationsverstärker	151
19.2.7	Stromquelle	152
19.2.8	Stromspiegel	152
19.2.9	Differentieller UI-Wandler	153
19.2.10	Schmitt-Trigger	153
19.2.11	Wien-Robinson Oszillator	154
19.2.12	Beschaltung des OPs mit Zweitoren	155
19.3	Realer Operationsverstärker	156
19.3.1	Ein- und Ausgangsspannungsbereich	156
19.3.2	Übertragungskennlinie	156
19.3.3	Gleichtaktfehler (Common Mode Error)	156
19.3.4	Effektive, geschlossene Verstärkung	157
19.3.5	Offsetfehler	157
19.3.6	Versorgungsspannungsfehler (Power supply error)	157
19.3.7	Eingangsströme (Bias- und Offsetstrom)	158

19.3.8	Kombination der statischen Fehler	158
19.3.9	Dynamischer Eingangswiderstand	158
19.3.10	Frequenzgang	159
20	Gegengekoppelte Verstärker	160
20.1	Mit- und Gegenkopplung	160
20.1.1	Gegenkopplung beim OP	160
20.2	Gegenkopplungsarten	161
20.2.1	Bestimmung der Gegenkopplungsart	162
20.2.2	Eingangsschaltungen	162
20.2.3	Ausgangsschaltungen	162
20.3	Schleifenverstärkung	163
20.4	Wirkung der GK auf die Sensivität der Verstärkung	163
20.5	Das Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt	163
V	Digitale Signalverarbeitung	164
21	Stochastische Signale	165
21.1	Allgemein	165
22	Abtastung	166
22.1	Ideale Abtastung	166
22.2	Flat Top Sampling	166
22.3	Sample and Hold	167
22.4	Abtasttheorem	167
22.5	Rekonstruktion	167
22.5.1	Interpolation	168
22.6	Energie und Leistung bandbegrenzter Signale	168
VI	Mathematik	169
23	Grundlagen	170
23.1	Allgemeines	170
23.1.1	Binome	170
23.1.2	Faktorzerlegungen	170
23.1.3	Quadratische Gleichung	171
23.1.4	Arithmetische Folge	171
23.1.5	Geometrische Folge	171
23.1.6	Partialbruchzerlegung	171
23.2	Matrizen und Determinanten	171
23.2.1	2×2 Matrizen	171
23.2.2	3×3 Matrizen	172
23.2.3	Transponierte einer Matrix	172
23.3	Vektorrechnung	172
23.3.1	Grundlagen	172
23.3.2	Lineare Abbildungen	173

23.4	Trigonometrie	173
23.4.1	Komplementwinkel	173
23.4.2	Sinussatz	174
23.4.3	Cosinussatz	174
23.5	Goniometrie	174
23.5.1	Serien (Lösungsmengen)	174
23.5.2	Potenzen	174
23.5.3	Additionstheoreme	175
23.5.4	Doppelwinkel	175
23.5.5	Dreifachwinkel	175
23.5.6	Halbwinkel	175
23.5.7	Summen und Produkte	175
23.5.8	Genaue Funktionswerte	176
23.6	Logarithmen	176
23.7	Komplexe Zahlen	176
23.7.1	Allgemeines	176
23.7.2	Rechenregeln	177
23.7.3	Euler	177
23.8	Ableiten	177
23.8.1	Rechenregeln	177
23.9	Integrieren	179
23.9.1	Rechenregeln	179
23.9.2	Substitution	179
23.9.3	Sätze	180
23.9.4	Integration rationaler Funktionen	180
23.9.5	Rationalisierungsformeln	181
23.9.6	Spezielle Integrale	181
24	Fourierreihen	184
24.1	Bezeichnungen	184
24.2	Skalarprodukt	184
24.2.1	Eigenschaften	184
24.2.2	Definitionen in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$	184
24.2.3	Für orthonormierte Basis	185
24.3	Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$	185
24.4	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	185
24.5	Abstand	185
24.6	Fourierreihe reell	185
24.6.1	Fourierkoeffizienten	185
24.6.2	Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{P}$	186
24.7	Fourierreihe komplex	186
24.7.1	Fourierkoeffizienten	186
24.7.2	Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{E}$	186
24.8	Parsevalsches Theorem	186
24.9	Durchgang durch LTI-System	186
24.10	Fourierkoeffizienten wichtiger periodischer Signale	187
25	Fouriertransformation	188

25.1	Fouriertransformation	188
25.2	Fourier-Cosinustransformation	188
25.3	Fourier-Sinustransformation	189
25.4	Faltung	189
25.4.1	Fallunterscheidung bei Definitionsbereichen	189
25.5	Eigenschaften	190
25.6	Fouriertransformationen mit Diracdelta	190
25.7	Fouriertransformationen wichtiger Impulse	191
26	Laplace	192
26.1	Laplacetransformation	192
26.2	Rechenregeln	193
26.3	Spezielle Laplacetransformationen	193
26.4	Faltung	194
26.5	Periodische Funktionen	194
27	Differentialgleichungen	195
27.1	1. Ordnung	195
27.1.1	Homogene	195
27.1.2	Partikuläre	195
27.1.3	Lösung	196
27.2	Höhere Ordnung	196
27.2.1	Homogen, linear mit konstanten Koeffizienten	196
27.2.2	Partikuläre	196
27.3	Laplace	197
27.3.1	Lineare Übertragung	197
27.3.2	Nichtlineare Übertragung	198
27.4	Übersicht Laplace und Fourier	199
28	Funktionsdiskussion	200
28.1	Funktionen mit einer Variablen	200
28.1.1	Zu beantwortende Fragen	200
28.1.2	Gerade (2-Punkte-Form)	201
28.1.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	201
28.2	Funktionen mit mehreren Variablen	201
28.2.1	Bezeichnungen	201
28.3	Kegelschnitte	202
28.3.1	Kreis	202
28.3.2	Ellipse	202
28.3.3	Hyperbel	202
28.3.4	Parabel	202

Teil I

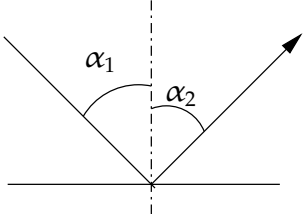
Physik

1 Geometrische Optik

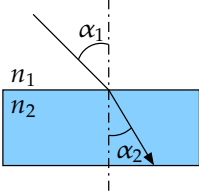
1.1 Sichtbares Licht

Wellenbereich λ/nm	Farbe
380 - 435	violett
435 - 465	blau
465 - 485	blaugrün
485 - 565	grün
565 - 590	gelb
590 - 630	orange
630 - 780	rot

1.2 Reflexionsgesetz

	$\alpha_1 = \alpha_2$	α_1 Einfallswinkel [rad] α_2 Ausfallswinkel [rad]
---	-----------------------	--

1.3 Brechung

	falls $n_2 > n_1$: $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ $n = \frac{c}{u}$ $n_2 > n_1 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$	α_1 Einfallswinkel [rad] α_2 Brechungswinkel [rad] $n_{1,2}$ Brechungsindex [1]
---	--	--

1.4 Totalreflexion

	falls $n_2 > n_1$: $\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$	α_g Grenzwinkel $[rad]$ $n_{1,2}$ Brechungsindex $[1]$
---	--	---

1.4.1 Prisma

falls $n_2 = 1$:

$$n_1 = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\frac{\delta}{2}}$$

$$n_2 = n_1 \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\frac{\gamma_{min} + \delta}{2}}$$

$$\gamma = \alpha - \delta + \arcsin \{ \sin(\delta) z \}$$

$$z = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right] - \cos \delta \sin \alpha}$$

$$\gamma_{min} = 2 \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\delta}{2} \right) - \delta$$

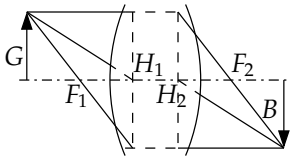
α	Einfallswinkel	[rad]
β	Ausfallswinkel	[rad]
δ	Scheitelwinkel	[rad]
γ	Ablenkwinkel	[rad]
γ_{min}	min Ablenkwinkel	[rad]
n_1	n-Prisma	[1]
n_2	n-Medium	[1]

1.4.2 Lichtwellenleiter

	falls $n_1 > n_2$: $\alpha_{1max} = \arcsin \frac{n_1 \cos \left[\arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \right]}{n_0}$ $n_0 \sin \alpha_1 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_2}$ $n_0 \sin \alpha_1 = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2}$ $n_0 \sin \alpha_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	<table> <tr> <td>α_1</td> <td>Einfallswinkel</td> <td>$[rad]$</td> </tr> <tr> <td>α_{1max}</td> <td>max Einfalls- winkel</td> <td>$[rad]$</td> </tr> <tr> <td>n_0</td> <td>n-Medium</td> <td>$[1]$</td> </tr> <tr> <td>n_1</td> <td>n-Kern</td> <td>$[1]$</td> </tr> <tr> <td>n_2</td> <td>n-Mantel</td> <td>$[1]$</td> </tr> </table>	α_1	Einfallswinkel	$[rad]$	α_{1max}	max Einfalls- winkel	$[rad]$	n_0	n-Medium	$[1]$	n_1	n-Kern	$[1]$	n_2	n-Mantel	$[1]$
α_1	Einfallswinkel	$[rad]$															
α_{1max}	max Einfalls- winkel	$[rad]$															
n_0	n-Medium	$[1]$															
n_1	n-Kern	$[1]$															
n_2	n-Mantel	$[1]$															

1.5 Abbildungen

1.5.1 Allgemein

 Vorzeichen: • Für sammelnde optische Bauelemente ist $f > 0$. • Für zerstreuende optische Bauelemente $f < 0$. • Für virtuelle Bilder ist $b < 0$ und $B < 0$. • Für vortuelle Gegenstände ist $g < 0$ und $G < 0$.	$g = \overline{H_1 G}$ $b = \overline{H_2 B}$ $f = \overline{H_1 F_1}$ $f = \overline{H_2 F_2}$ $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ $\beta = \frac{B}{G}$	<table> <tr> <td>g</td><td>Gegenstandsweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Bildweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Brennweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>H_1</td><td>vorderer Hauptpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>H_2</td><td>hinterer Hauptpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>F_1</td><td>vorderer Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>F_2</td><td>hinterer Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>G</td><td>Gegenstandsgrösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bildgrösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>β</td><td>Abbildungsverhältnis</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	g	Gegenstandsweite	$[m]$	b	Bildweite	$[m]$	f	Brennweite	$[m]$	H_1	vorderer Hauptpunkt		H_2	hinterer Hauptpunkt		F_1	vorderer Brennpunkt		F_2	hinterer Brennpunkt		G	Gegenstandsgrösse	$[m]$	B	Bildgrösse	$[m]$	β	Abbildungsverhältnis	$[1]$
g	Gegenstandsweite	$[m]$																														
b	Bildweite	$[m]$																														
f	Brennweite	$[m]$																														
H_1	vorderer Hauptpunkt																															
H_2	hinterer Hauptpunkt																															
F_1	vorderer Brennpunkt																															
F_2	hinterer Brennpunkt																															
G	Gegenstandsgrösse	$[m]$																														
B	Bildgrösse	$[m]$																														
β	Abbildungsverhältnis	$[1]$																														

1.5.2 Spiegel

Parabolspiegel

Bei Parabolspiegeln treffen sich alle parallel einfallenden Strahlen in einem Punkt (Brennpunkt) auf der optische Achse.

Elliptische Spiegel

Alle Strahlen die vom einen Brennpunkt ausgesendet werden, treffen auf den zweiten Brennpunkt. (Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.)

Hyperbolische Spiegel

Alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgesendet werden, verlaufen nach der Reflexion so, als wären sie vom anderen der beiden Brennpunkte ausgesendet worden. (Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.)

Sphärische Spiegel

Die spiegelnde Fläche ist ein Teil einer Kugel. Wenn nur ein kleiner Ausschnitt der Kugel-
fläche verwendet wird, gehen parallel einfallende Strahlen näherungsweise durch einen
Brennpunkt: $f = r/2$.

1.5.3 Abbildungen durch Spiegel

Konkavspiegel

	Befindet sich der Gegenstand ausserhalb der Brennweite, so entsteht ein reelles Bild, anderseits ist das Bild virtuell.	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	B	Bild	$[m]$	F	Brennpunkt	
G	Gegenstand	$[m]$									
B	Bild	$[m]$									
F	Brennpunkt										

Konvexspiegel

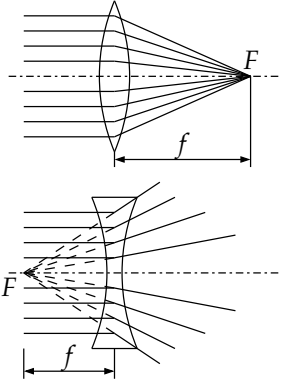
	Konvexspiegel haben stets virtuelle Bilder bei reellen Gegenständen.	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	B	Bild	$[m]$	F	Brennpunkt	
G	Gegenstand	$[m]$									
B	Bild	$[m]$									
F	Brennpunkt										

Planspiegel

	Das Virtuelle Bild ist gleich gross wie der Gegenstand. Der Brennpunkt F liegt im Unendlichen. Der Planspiegel ist ein Spezialfall des Konvexspiegels.	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	B	Bild	$[m]$	F	Brennpunkt	
G	Gegenstand	$[m]$									
B	Bild	$[m]$									
F	Brennpunkt										

1.5.4 Linsen

Linsentypen

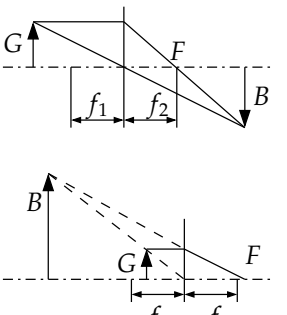
	$q = \frac{d}{f}$ $D = \frac{1}{f}$ Linsenschleifergleichung: $D = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ Falls das Linsenmaterial optisch dichter ist als das umgebende Medium, zeigt die obere Abbildung eine Sammel- und die untere eine Streulinse.	<table> <tr> <td>q</td><td>Öffnungsverhältnis</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>d</td><td>effektiver Durchm.</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Brennweite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Brechkraft</td><td>[dpt]</td></tr> <tr> <td>n_1</td><td>n-Umgebung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>n_2</td><td>n-Linse</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>$r_{1,2}$</td><td>Linsenradien</td><td>[m]</td></tr> </table>	q	Öffnungsverhältnis	[m]	d	effektiver Durchm.	[m]	f	Brennweite	[m]	D	Brechkraft	[dpt]	n_1	n-Umgebung	[1]	n_2	n-Linse	[1]	$r_{1,2}$	Linsenradien	[m]
q	Öffnungsverhältnis	[m]																					
d	effektiver Durchm.	[m]																					
f	Brennweite	[m]																					
D	Brechkraft	[dpt]																					
n_1	n-Umgebung	[1]																					
n_2	n-Linse	[1]																					
$r_{1,2}$	Linsenradien	[m]																					

Linsensysteme

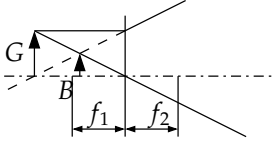
Zwei Linsen mit Brennweiten f_1, f_2 auf einer Achse ergeben eine Linse mit Brennweite f, falls ihr Abstand d kleiner f_1 ist.	$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$ $D = D_1 + D_2 - d D_1 D_2$	<table> <tr> <td>$f_{1,2}$</td><td>Brennweiten</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Brechkraft</td><td>[dpt]</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Linsenabstand</td><td>[m]</td></tr> </table>	$f_{1,2}$	Brennweiten	[m]	D	Brechkraft	[dpt]	d	Linsenabstand	[m]
$f_{1,2}$	Brennweiten	[m]									
D	Brechkraft	[dpt]									
d	Linsenabstand	[m]									

1.5.5 Abbildungen durch Linsen

Sammellinse

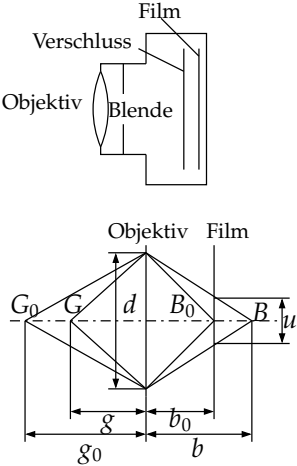
	Der Gegenstand ist innerhalb der Brennweite $\Rightarrow$ reelles Bild. Der Gegenstand ist ausserhalb der Brennweite $\Rightarrow$ virtuelles Bild.	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bild</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>$f_{1,2}$</td><td>Brennweiten</td><td>[m]</td></tr> </table>	G	Gegenstand	[m]	B	Bild	[m]	F	Brennpunkt		$f_{1,2}$	Brennweiten	[m]
G	Gegenstand	[m]												
B	Bild	[m]												
F	Brennpunkt													
$f_{1,2}$	Brennweiten	[m]												

Zerstreuungslinse

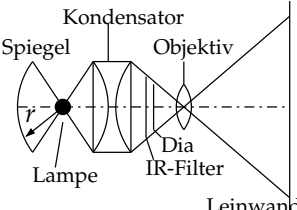
	Bei Zerstreuungslinsen haben reelle Gegenstände stets virtuelle Bilder, unabhängig von ihrer Position.	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>$f_{1,2}$</td><td>Brennweiten</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	B	Bild	$[m]$	F	Brennpunkt		$f_{1,2}$	Brennweiten	$[m]$
G	Gegenstand	$[m]$												
B	Bild	$[m]$												
F	Brennpunkt													
$f_{1,2}$	Brennweiten	$[m]$												

1.5.6 Optische Geräte

Fotoapparat

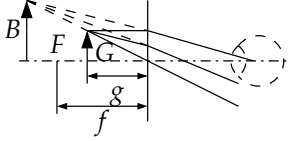
	$B = \frac{f}{g - f} G$ $I \approx d^2$ $H \approx \frac{1}{B^2} \approx \frac{d^2}{f^2}$ $E = Ht$ $q = \frac{d}{f} \quad Z = \frac{1}{q}$ $E \approx q^2 t$ $\frac{u}{d} = \frac{b - b_0}{b}$ $\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{qf^2}$ $g > g_0 \Rightarrow - \quad g < g_0 \Rightarrow +$	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Gegenstandsweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g_0</td><td>Schärfentiefenbereich</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bildweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Brennweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Lichtstrom</td><td>$[W]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Durchm. Eintrittspupille</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>H</td><td>Helligkeit</td><td>$\left[\frac{W}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$q$</td><td>Öffnungsverhältnis</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>Z</td><td>Brenndeneinstellung</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Belichtung</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Belichtungszeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>u</td><td>Durchm. Unschärfenkreis</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	g	Gegenstandsweite	$[m]$	g_0	Schärfentiefenbereich	$[m]$	B	Bildweite	$[m]$	b	Bild	$[m]$	f	Brennweite	$[m]$	I	Lichtstrom	$[W]$	d	Durchm. Eintrittspupille	$[m]$	H	Helligkeit	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$	q	Öffnungsverhältnis	$[1]$	Z	Brenndeneinstellung	$[1]$	E	Belichtung	$[1]$	t	Belichtungszeit	$[s]$	u	Durchm. Unschärfenkreis	$[m]$
G	Gegenstand	$[m]$																																										
g	Gegenstandsweite	$[m]$																																										
g_0	Schärfentiefenbereich	$[m]$																																										
B	Bildweite	$[m]$																																										
b	Bild	$[m]$																																										
f	Brennweite	$[m]$																																										
I	Lichtstrom	$[W]$																																										
d	Durchm. Eintrittspupille	$[m]$																																										
H	Helligkeit	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$																																										
q	Öffnungsverhältnis	$[1]$																																										
Z	Brenndeneinstellung	$[1]$																																										
E	Belichtung	$[1]$																																										
t	Belichtungszeit	$[s]$																																										
u	Durchm. Unschärfenkreis	$[m]$																																										

Projektor

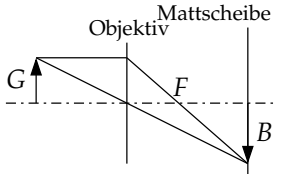
	Das Dia wird im Objektiv abgebildet $\Rightarrow g_2 = b_1$ Das Bild der Lampe muss im Objektiv sein.	<table> <tr> <td>g_2</td><td>g-Objektiv</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b_1</td><td>b-Kondensator</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	g_2	g-Objektiv	$[m]$	b_1	b-Kondensator	$[m]$
g_2	g-Objektiv	$[m]$						
b_1	b-Kondensator	$[m]$						

1 Geometrische Optik

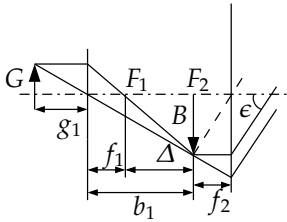
Lupe

 Sammellinse zur Vergrößerung des Sehwinkels (Bild im Unendlichen)	Gegenstand in Brennweite $\Rightarrow$ Sehwinkel ϵ ist unabhängig von der Augenposition $V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$ $V = \frac{s}{g} > V_{normal}$ $\tan \epsilon' = \frac{G}{f}$ $\tan \epsilon_0 = \frac{G}{s}$ $V = \frac{s}{f}$	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Gegenstandsweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bildweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Brennweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Sehwinkel durch Lupe</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>ϵ_0</td><td>Sehwinkel ohne Lupe</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>s</td><td>deutliche Sehweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Vergrößerung (max. ca. 25)</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	g	Gegenstandsweite	$[m]$	B	Bildweite	$[m]$	b	Bild	$[m]$	f	Brennweite	$[m]$	ϵ	Sehwinkel durch Lupe	$[rad]$	ϵ_0	Sehwinkel ohne Lupe	$[rad]$	s	deutliche Sehweite	$[m]$	V	Vergrößerung (max. ca. 25)	$[1]$
G	Gegenstand	$[m]$																											
g	Gegenstandsweite	$[m]$																											
B	Bildweite	$[m]$																											
b	Bild	$[m]$																											
f	Brennweite	$[m]$																											
ϵ	Sehwinkel durch Lupe	$[rad]$																											
ϵ_0	Sehwinkel ohne Lupe	$[rad]$																											
s	deutliche Sehweite	$[m]$																											
V	Vergrößerung (max. ca. 25)	$[1]$																											

Mikroprojektor

 Das reelle Bild einer Sammellinse wird verwendet und auf einer Mattscheibe abgebildet	Bild aus deutlicher Sehweite betrachtet: $V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ Stahlengang siehe Projektor	<table> <tr> <td>G</td><td>Gegenstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Gegenstandsweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Bildweite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Bild</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Vergrößerung</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	G	Gegenstand	$[m]$	g	Gegenstandsweite	$[m]$	B	Bildweite	$[m]$	b	Bild	$[m]$	V	Vergrößerung	$[1]$
G	Gegenstand	$[m]$															
g	Gegenstandsweite	$[m]$															
B	Bildweite	$[m]$															
b	Bild	$[m]$															
V	Vergrößerung	$[1]$															

Mikroskop



Das Objektiv verhält sich wie ein Mikroprojektor. Sein Bild wird durch das Okular, welches sich wie eine Lupe verhält, betrachtet.

$$V = V_1 V_2$$

$$V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$$

$$V = \frac{B}{G} \frac{f}{f_2}$$

$$V = \frac{\Delta}{f_1} \frac{s}{f_2}$$

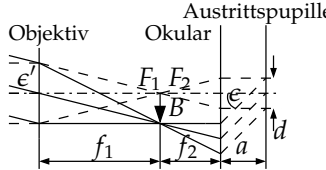
$$V_1 = \frac{\Delta}{f_1}$$

$$V_2 = \frac{s}{f_2}$$

$$\Delta = b_1 - f_1$$

G	Gegenstand	$[m]$
g_1	Gegenstandsweite	$[m]$
B	Bild	$[m]$
b_1	Bildweite	$[m]$
F_1	Brennpunkt Objektiv	
F_2	Brennpunkt Okular	
f_1	Brennweite Objektiv	$[m]$
f_2	Brennweite Okular	$[m]$
Δ	Tubuslänge	$[m]$
ϵ	Sehwinkel	$[rad]$
s	deutliche Sehweite	$[m]$
V	Vergrößerung total	$[1]$
V_1	V-Objektiv	$[1]$
V_2	V-Okular	$[1]$

Fernrohre

 Ein Fernglas mit den Daten 10×50 hat eine Vergrößerung von 10 und einen Objektivdurchmesser von 50 mm.	$V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon'}$ $\epsilon = V \epsilon'$ $V = \frac{f_1}{f_2}$ $\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_2}$ $\frac{D}{d} = \frac{f_1 + f_2}{a} = V$ $a = \frac{l}{V} \quad d = \frac{D}{V}$ $L = d^2$ $L = \left(\frac{D}{V}\right)^2$ $l = f_1 + f_2$	B Bildweite [m] f_1 Brennweite Objektiv [m] f_2 Brennweite Okular [m] l Fernrohlänge [m] ϵ Ausfallswinkel [rad] ϵ' Einfallswinkel [rad] s deutliche Sehweite [m] V Vergrößerung total [1] L Lichtstärke [1] D Durchm. Objektiv [m] d Durchm. Austrittspupille [mm] a Abstand Okular Austrittspupille [m]
---	--	--

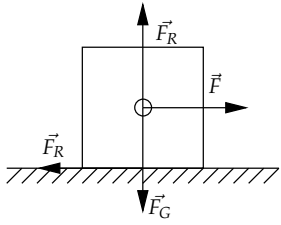
2 Statik

2.1 Starre Körper im Gleichgewicht

2.1.1 Gleichgewichtsbedingung starrer Körper

Ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn keine resultierende Kraft auf ihn wirkt, d.h. die Summe der ihn angreifenden Kräfte ist null.	Allgemein: $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$ In Komponenten: $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iz} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iz} = 0$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Drahmoment</td><td>$[Nm]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[N]$	M	Drahmoment	$[Nm]$
F	Kraft	$[N]$						
M	Drahmoment	$[Nm]$						

2.1.2 Haftreibung

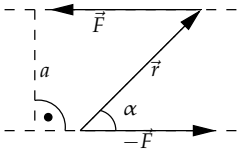
	$\vec{F}_N = \vec{F}_G \quad \vec{F}_R = \vec{F}$ $\vec{F}_R \leq \vec{F}_{Rmax} \leq \mu_H F_N$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>F_G</td><td>Gewichtskraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>F_N</td><td>Normalkraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>F_R</td><td>Reibkraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>μ_H</td><td>Haftreibungskoeffizient</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[N]$	F_G	Gewichtskraft	$[N]$	F_N	Normalkraft	$[N]$	F_R	Reibkraft	$[N]$	μ_H	Haftreibungskoeffizient	$[1]$
F	Kraft	$[N]$															
F_G	Gewichtskraft	$[N]$															
F_N	Normalkraft	$[N]$															
F_R	Reibkraft	$[N]$															
μ_H	Haftreibungskoeffizient	$[1]$															

2.1.3 Reaktionsprinzip

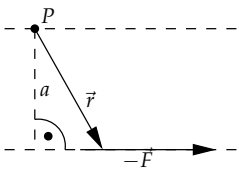
Das Reaktionsprinzip gilt, wenn zwei Körper Kräfte auf einander ausüben.	$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$	F_{AB} Kraft von Körper A [N] F_{BA} Kraft von Körper B [N]
--	--------------------------------	--

2.1.4 Drehmoment

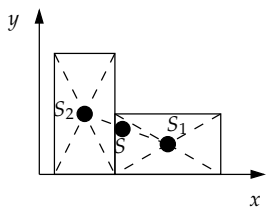
Drehmoment eines Kräftepaars

	$M = aF$ $\vec{M} \perp$ auf Ebene $\vec{r}, \vec{F}$: $M = Fr \sin(\alpha)$ Drehmomente nicht in einer Ebene: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Drehsinn im Gegenuhrzeigersinn: +	M Drehmoment [Nm] a Abstand [m] F Kraft [N] r Radius [m]
---	---	---

Drehmoment einer Einzelkraft

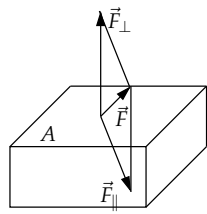
	$M = aF$ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	M Drehmoment [Nm] a Abstand [m] F Kraft [N] r Radius [m]
---	--	---

2.2 Schwerpunkt

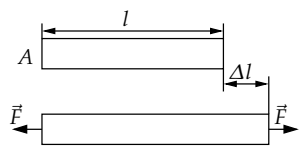
	$x_s = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}$ $y_s = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}$ $z_s = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}$ Schwerpunkt eines Halbkreises: $x = 0 \quad y = \frac{4r}{3\pi}$	x_s, y_s, z_s Koordinaten des Gesamtschwerpunktes x_i, y_i, z_i Schwerpunktskoordinaten Teilkörper i r Radius
---	---	---

2.3 Deformierung

2.3.1 Spannung

	$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}$ $\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$ $p = -\sigma$	σ Zugspannung $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ τ Schubspannung $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ p Druck $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ A Fläche $[m^2]$ F Kraft $[N]$
---	---	---

2.3.2 Dehnung

	$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $\Delta l \sim \frac{l F}{A}$ $\epsilon = \frac{1}{E} \sigma = \frac{1}{E} \frac{F}{A}$	ϵ Dehnung $[1]$ A Querschnittsfläche $[m^2]$ l Balkenlänge $[m]$ F Kraft $[N]$ E Elastizitätsmodul $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ σ Zugspannung $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
---	---	---

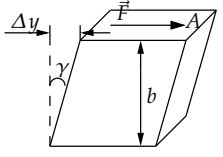
2.3.3 Querkontraktion

Die Querkontraktion entspricht dem Dünnenwerden eines Materials bei Dehnung	$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-\mu \Delta l}{l}$ $\epsilon_q = -\mu \epsilon$	ϵ_q Querkontraktion [1] μ Poissonzahl [1] d Dicke Material [m] l Länge [m]
---	--	--

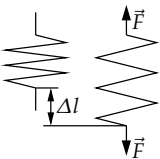
2.3.4 Kompression

Wird ein Körper einem Druck ausgesetzt, spricht man von Kompression	$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$ $\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}$	V Volumen [m^3] p Druck [$\frac{N}{m^2}$] κ Kompressibilität [$\frac{m^2}{N}$] μ Poissonzahl [1] E E-Modul [$\frac{N}{m^2}$]
---	--	---

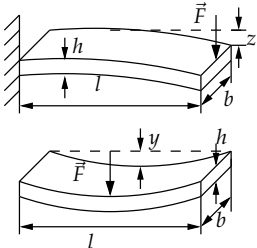
2.3.5 Schubbeanspruchung

	$\frac{\Delta y}{b} = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{1}{G} \tau$ $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$	F Kraft [N] A Fläche [m^2] y Spaltbreite [m] γ Winkel [rad] b Körperbreite [m] G Schubmodul [$\frac{N}{m^2}$] τ Schubspan. [$\frac{N}{m^2}$] μ Poissonzahl [1] E E-Modul [$\frac{N}{m^2}$]
---	--	--

2.3.6 Schraubenfeder

	$F = c \Delta l$ $c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$ parallel: $c = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ seriel: $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$	F Kraft [N] c Federkonst. [$\frac{N}{m}$] l Länge [m] G Schubmodul [$\frac{N}{m^2}$] r Radius Draht [m] R Radius Feder [m] n Windungen [1]
---	---	--

2.3.7 Biegung eines Balkens

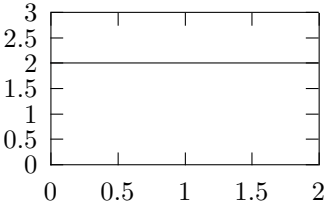
	$z = \frac{4l^3}{Eb h^3} F$ $y = \frac{5\rho g l^4}{32E h^2}$	<table> <tr> <td>z</td><td>Durchbiegung</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>y</td><td>Durchbiegung</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Balkenbreite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Balkenhöhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdanziehung</td><td>$[\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 9,81$</td><td></td></tr> <tr> <td>E</td><td>Elastizitätsmodul</td><td>$[\frac{N}{m^2}]$</td></tr> </table>	z	Durchbiegung	$[m]$	y	Durchbiegung	$[m]$	l	Länge	$[m]$	b	Balkenbreite	$[m]$	h	Balkenhöhe	$[m]$	F	Kraft	$[N]$	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	g	Erdanziehung	$[\frac{m}{s^2}]$		$= 9,81$		E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
z	Durchbiegung	$[m]$																														
y	Durchbiegung	$[m]$																														
l	Länge	$[m]$																														
b	Balkenbreite	$[m]$																														
h	Balkenhöhe	$[m]$																														
F	Kraft	$[N]$																														
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																														
g	Erdanziehung	$[\frac{m}{s^2}]$																														
	$= 9,81$																															
E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$																														

2.4 Vorgehen beim Lösen von Statikaufgaben

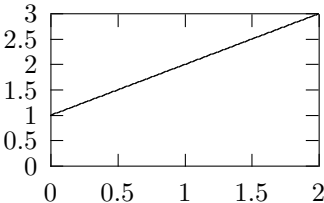
1. Skizze mit allen Kräften aufzeichnen
2. Koordinatensystem einführen
3. Falls notwendig einen Drehpunkt einführen
4. Gleichgewichtsbedingungs - Gleichungssystem aufstellen
5. Gleichungssystem auflösen

3 Kinematik

3.1 Gleichförmige Bewegung

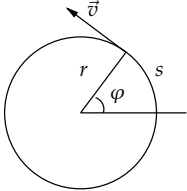
	$a = 0$ $v = \text{konstant}$ $s = vt + s_0$	<table> <tr> <td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$s$</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>s_0</td><td>Anfangs Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	s	Strecke	$[m]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	s_0	Anfangs Strecke	$[m]$
a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
s	Strecke	$[m]$															
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$															
t	Zeit	$[s]$															
s_0	Anfangs Strecke	$[m]$															

3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

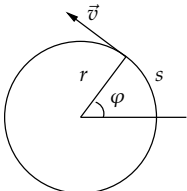
	$a = \text{konstant}$ $v = at + v_0$ $v = \dot{s}$ $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$ $s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$ $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $a = \dot{v} = \ddot{s}$ $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2as}$	<table> <tr> <td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$s$</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>v_0</td><td>Start-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>v_1</td><td>End-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>s_0</td><td>Anfangs Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	s	Strecke	$[m]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	v_1	End-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	s_0	Anfangs Strecke	$[m]$
a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
s	Strecke	$[m]$																					
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
v_1	End-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
t	Zeit	$[s]$																					
s_0	Anfangs Strecke	$[m]$																					

3.3 Drehbewegung

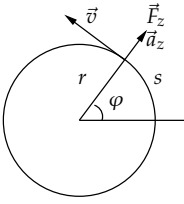
3.3.1 Gleichförmige Kreisbewegung

 Analogie: $s \rightarrow \varphi$ $v \rightarrow \omega$ $a \rightarrow \alpha$	$\alpha = 0$ $s = r\varphi$ $v = r\omega$ $\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{r}$ $\varphi = \omega t$ $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	<table> <tr> <td>α</td><td>Winkel-Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\omega$</td><td>Winkel-Geschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\varphi$</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>$r$</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>$T$</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Frequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>s_0</td><td>Anfangs Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw. tang.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> </table>	α	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	φ	Winkel	$[rad]$	r	Radius	$[m]$	T	Periode	$[s]$	f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	s	Strecke	$[m]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	s_0	Anfangs Strecke	$[m]$	v	Geschw. tang.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
α	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																																	
ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																																	
φ	Winkel	$[rad]$																																	
r	Radius	$[m]$																																	
T	Periode	$[s]$																																	
f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
s	Strecke	$[m]$																																	
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																	
t	Zeit	$[s]$																																	
s_0	Anfangs Strecke	$[m]$																																	
v	Geschw. tang.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																	

3.3.2 Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

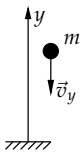
	$\alpha = \text{konstant}$ $\alpha = \dot{\omega}$ $\alpha = \ddot{\varphi}$ $a = r\alpha$ $\omega = \alpha t + \omega_0$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}$ $\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ $\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$	<table> <tr> <td>α</td><td>Winkel-Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\omega$</td><td>Winkel-Geschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\omega_0$</td><td>Start-Winkel-Geschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\omega_1$</td><td>End-Winkel-Geschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\varphi$</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>$\varphi_0$</td><td>Start-Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> </table>	α	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	ω_0	Start-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	ω_1	End-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	φ	Winkel	$[rad]$	φ_0	Start-Winkel	$[rad]$	r	Radius	$[m]$	t	Zeit	$[s]$	a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
α	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																											
ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
ω_0	Start-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
ω_1	End-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
φ	Winkel	$[rad]$																											
φ_0	Start-Winkel	$[rad]$																											
r	Radius	$[m]$																											
t	Zeit	$[s]$																											
a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																											

3.3.3 Zentripetalbeschleunigung

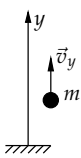
	$a_z = \frac{v^2}{r}$ $a_z = r\omega^2$ $v = \frac{2\pi r}{T}$ $F_z = ma_z = \frac{mv^2}{r}$ $F_z = m\omega^2 r$	<table> <tr> <td>α_z</td><td>Zentr.-Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\omega$</td><td>Winkel-Geschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\varphi$</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>$r$</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>$T$</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> </table>	α_z	Zentr.-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	φ	Winkel	$[rad]$	r	Radius	$[m]$	T	Periode	$[s]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	m	Masse	$[kg]$
α_z	Zentr.-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																					
ω	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																					
φ	Winkel	$[rad]$																					
r	Radius	$[m]$																					
T	Periode	$[s]$																					
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
m	Masse	$[kg]$																					

3.4 Wurfbahnen

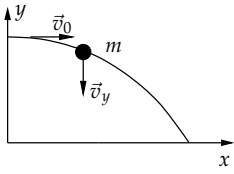
3.4.1 Freier Fall

	$a_y = -g$ $v_y = -gt$ $v_e = \sqrt{2gh}$ $y = -\frac{g}{2}t^2$ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	<table> <tr> <td>v_0</td><td>Abschuss-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>t_s</td><td>Steigzeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>t_f</td><td>Flugzeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> </table>	v_0	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	t_s	Steigzeit	$[s]$	t_f	Flugzeit	$[s]$	h	Höhe	$[m]$	g	Erdbeschl. = 9.81	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$
v_0	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
t	Zeit	$[s]$																		
t_s	Steigzeit	$[s]$																		
t_f	Flugzeit	$[s]$																		
h	Höhe	$[m]$																		
g	Erdbeschl. = 9.81	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																		

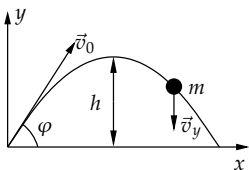
3.4.2 Senkrechter Wurf

	$t_s = \left \frac{v_0}{g}\right $ $h = \frac{v_0 t}{2} = \left \frac{v_0^2}{2g}\right $ $t_f = 2t_s$	<table> <tr> <td>v_0</td><td>Abschuss-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t_s</td><td>Steigzeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>t_f</td><td>Flugzeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> </table>	v_0	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t_s	Steigzeit	$[s]$	t_f	Flugzeit	$[s]$	h	Höhe	$[m]$	g	Erdbeschl. = 9.81	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$
v_0	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$															
t_s	Steigzeit	$[s]$															
t_f	Flugzeit	$[s]$															
h	Höhe	$[m]$															
g	Erdbeschl. = 9.81	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$															

3.4.3 Horizontaler Wurf

	$a_x = 0 \rightarrow v_x = v_0$ $s_x = v_0 t$ $s_x = \sqrt{\frac{2v_0^2 y}{g}}$ $a_y = -g \rightarrow v_y = -gt$ $s_y = -\frac{g}{2} t^2$ $s_y = -\frac{g}{2v_0^2} s_x^2$	<table> <tr> <td>a</td><td>Beschl.</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$s$</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>v_0</td><td>Start-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	a	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	s	Strecke	$[m]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81	
a	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
s	Strecke	$[m]$																					
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
t	Zeit	$[s]$																					
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
	9.81																						

3.4.4 Schiefer Wurf

	$a_y = -g \quad a_x = 0$ $d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\varphi)$ $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\varphi)$ $t = \frac{2v_0 \sin(\varphi)}{g}$ $\Delta y = v_0 \sin(\varphi) t - \frac{gt^2}{2}$ $\Delta x = v_0 \cos(\varphi) t$ Parabelgleichung: $y = \tan(\varphi) s_x - \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\varphi)}$	<table> <tr> <td>a</td><td>Beschl.</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$d$</td><td>Wurfdistanz</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>v_0</td><td>Start-Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Abschuss- winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	a	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	d	Wurfdistanz	$[m]$	s	Strecke	$[m]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$	φ	Abschuss- winkel	$[rad]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81	
a	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																											
d	Wurfdistanz	$[m]$																											
s	Strecke	$[m]$																											
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																											
v_0	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																											
t	Zeit	$[s]$																											
φ	Abschuss- winkel	$[rad]$																											
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																											
	9.81																												

4 Dynamik

4.1 Newtonsche Gesetze

4.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. Die Gesamtsumme der Kräfte in einem abgeschlossenen System ist unveränderlich:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

4.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsgesetz)

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur Kraft, die auf ihn wirkt.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

4.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz (Actio = Reactio)

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft $\vec{F}_{AB}$, so wirkt der Körper B mit der entgegengesetzt gerichteten, gleich grossen Kraft $\vec{F}_{BA}$.

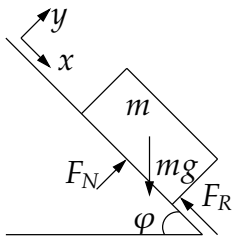
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = ma_x \vec{a} \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = ma_y \vec{a} \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = ma_z \vec{a}$$

4.1.4 Allgemeines Vorgehen beim lösen von Bewegungsproblemen

1. Zeichnung anfertigen
2. Für jeden Körper, der untersucht werden soll, wird ein Kräftediagramm eingezeichnet
3. Ein geeignetes Koordinatensystem einführen
4. Das entstandene Gleichungssystem auflösen
5. Ergebnisse mit gesundem Menschenverstand auflösen

4.2 Masse und Gewicht

4.2.1 Spezielle Kräfte, Masse, Dichte und Reibung

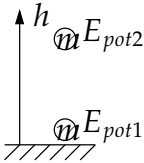
	$F_G = mg$ $F_R = \mu_G F_N$ $\rho = \frac{m}{V}$ $\mu = -\frac{a}{g}$ $\mu_H = \tan(\varphi_{krit})$ $F_{Hmax} = \mu_H F_N$	<table> <tr><td>F_G</td><td>Gewichtskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>F_R</td><td>Reibungskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>F_N</td><td>Normalkraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr><td>μ</td><td>Reibung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>μ_G</td><td>Gleitreibung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>μ_H</td><td>Haftreibung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>φ_{krit}</td><td>kritischer Winkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td>F_{Hmax}</td><td>Max. Haftreibungskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$[\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr><td>g</td><td>Fallbeschleunigung</td><td>$[\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr><td>m</td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr><td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> </table>	F_G	Gewichtskraft	[N]	F_R	Reibungskraft	[N]	F_N	Normalkraft	[N]	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	μ	Reibung	[1]	μ_G	Gleitreibung	[1]	μ_H	Haftreibung	[1]	φ_{krit}	kritischer Winkel	[rad]	F_{Hmax}	Max. Haftreibungskraft	[N]	a	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$	g	Fallbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$	m	Masse	[kg]	V	Volumen	$[m^3]$
F_G	Gewichtskraft	[N]																																							
F_R	Reibungskraft	[N]																																							
F_N	Normalkraft	[N]																																							
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																																							
μ	Reibung	[1]																																							
μ_G	Gleitreibung	[1]																																							
μ_H	Haftreibung	[1]																																							
φ_{krit}	kritischer Winkel	[rad]																																							
F_{Hmax}	Max. Haftreibungskraft	[N]																																							
a	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																																							
g	Fallbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																																							
m	Masse	[kg]																																							
V	Volumen	$[m^3]$																																							

4.3 Arbeit und Energie, Energieerhaltung

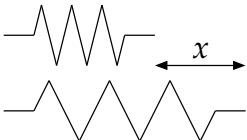
Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Arbeit = überwinden eines Widerstandes	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $W = Pt$ Energieerhaltung im abgeschlossenen System: $\sum_i E_i = const.$	<table> <tr><td>W</td><td>Arbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr><td>E</td><td>Energie</td><td>[J]</td></tr> <tr><td>F</td><td>Kraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>s</td><td>Weg</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> </table>	W	Arbeit	[J]	E	Energie	[J]	F	Kraft	[N]	s	Weg	[m]	t	Zeit	[s]
W	Arbeit	[J]															
E	Energie	[J]															
F	Kraft	[N]															
s	Weg	[m]															
t	Zeit	[s]															

4 Dynamik

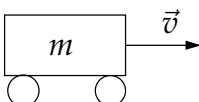
4.3.1 Hubarbeit, Potentielle Energie

	$E_{pot} = mgh$ $W_H \vec{F} \cdot \vec{h}$ $E_{pot} = W_H$	<table> <tr> <td>E_{pot}</td><td>potentielle Energie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>W_H</td><td>Hubarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Fallbeschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$h$</td><td>Höhe</td><td>[m]</td></tr> </table>	E_{pot}	potentielle Energie	[J]	W_H	Hubarbeit	[J]	m	Masse	[kg]	g	Fallbeschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	h	Höhe	[m]
E_{pot}	potentielle Energie	[J]															
W_H	Hubarbeit	[J]															
m	Masse	[kg]															
g	Fallbeschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
h	Höhe	[m]															

4.3.2 Spannarbeit, Spannenergie

	$E_s = \frac{cx^2}{2}$ $W_s = \vec{F} \cdot \vec{x}$ $E_s = W_s$	<table> <tr> <td>E_s</td><td>Spannenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>W_s</td><td>Spannarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Federkonst.</td><td>$\left[\frac{N}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>x</td><td>Spann-Weg</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Spannkraft</td><td>[N]</td></tr> </table>	E_s	Spannenergie	[J]	W_s	Spannarbeit	[J]	c	Federkonst.	$\left[\frac{N}{m}\right]$	x	Spann-Weg	[m]	F	Spannkraft	[N]
E_s	Spannenergie	[J]															
W_s	Spannarbeit	[J]															
c	Federkonst.	$\left[\frac{N}{m}\right]$															
x	Spann-Weg	[m]															
F	Spannkraft	[N]															

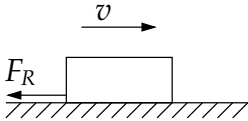
4.3.3 Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie

	$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ $W_B = \frac{m(\Delta v)^2}{2}$	<table> <tr> <td>E_{trans}</td><td>Translationsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>W_B</td><td>Beschleunigungsarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> </table>	E_{trans}	Translationsenergie	[J]	W_B	Beschleunigungsarbeit	[J]	m	Masse	[kg]	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
E_{trans}	Translationsenergie	[J]												
W_B	Beschleunigungsarbeit	[J]												
m	Masse	[kg]												
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$												

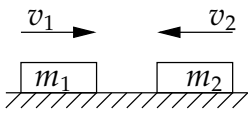
4.3.4 Rotationsenergie

	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$	<table> <tr> <td>E_{rot}</td><td>Rotationsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>J</td><td>Masseträgheit</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Winkelgeschw.</td><td>$\left[\frac{rad}{s}\right]$</td></tr> </table>	E_{rot}	Rotationsenergie	[J]	J	Masseträgheit	$[kgm^2]$	ω	Winkelgeschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
E_{rot}	Rotationsenergie	[J]									
J	Masseträgheit	$[kgm^2]$									
ω	Winkelgeschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$									

4.3.5 Reibungsarbeit

	$W_R = F_R s$	W_R Reibarbeit [J] F_R Reibkraft [N] s Strecke [m]
---	---------------	--

4.3.6 Verformungsarbeit

	Inelastisch: $W_D = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$ Elastisch: $W_D = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta s$	W_D Deformationsarbeit [J] m_1, m_2 Massen [kg] v_1, v_2 Geschw. [$\frac{m}{s}$] F_1, F_2 Kräfte [N]
---	--	---

4.3.7 Einstein, Kernbindungsenergie

	$E = mc^2$	E Energie [J] m Masse [kg] c v_{Licht} [$\frac{m}{s}$] = 299'792'458 (Vakuum)
--	------------	---

4.4 Leistung

	$P = \frac{dW}{dt}$ $P = \frac{F ds}{dt} = \vec{F} \vec{s}$ $P = M \omega$	P Leistung [W] W Energie [J] t Zeit [s] F Kraft [N] s Strecke [m] M Drehmoment [Nm] ω Winkelgeschwindigkeit [$\frac{rad}{s}$]
--	--	--

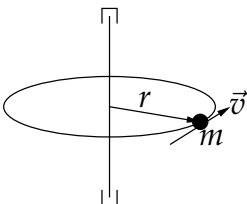
4.5 Wirkungsgrad

	$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{p_{ab}}{p_{zu}}$ $\eta_{tot} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots$	η Wirkungsgrad [1] P_{ab} P-Abgeg. [W] P_{zu} P-Aufge. [W] W_{ab} W-Abgeg. [J] W_{zu} W-Aufge. [J]
--	---	---

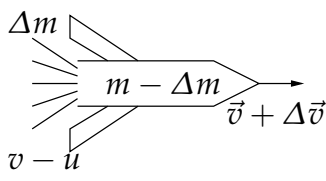
4.6 Impuls, Impulserhaltung

Impulserhaltungssatz: Im abgeschlossenen System bleibt der Impuls konstant	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ $p_{ges} = \sum_{i=1}^n m_i v_s$ Kraftstoß: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	p Impuls $\left[\frac{kgm}{s}\right]$ m Masse [kg] v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ F Kraft [N] Δt Wirkungs- dauer [s]
---	---	---

4.6.1 Drehimpuls

	$L = mvr \sin(\varphi)$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $L = J\omega$ $\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	L Drehimpuls $\left[\frac{kgm^2}{s}\right]$ m Masse [kg] r Radius [m] v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ ω Winkelgeschw. $\left[\frac{rad}{s}\right]$ M Drehmoment [Nm]
---	--	---

4.6.2 Raketenantrieb

	$v = u \ln \frac{m_0}{m} + v_0$ $F_s = \frac{dm}{dt} u$ Spezifischer Impuls: $T = \frac{u}{g}$	<table> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>u</td><td>v-Strahl relativ zu Rakete</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>m_0</td><td>Startmasse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>F_s</td><td>Schubkraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> </table>	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	u	v-Strahl relativ zu Rakete	$\left[\frac{m}{s}\right]$	m_0	Startmasse	$[kg]$	m	Masse	$[kg]$	F_s	Schubkraft	$[N]$	T	Zeit	$[s]$	g	Erdbeschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
u	v-Strahl relativ zu Rakete	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
m_0	Startmasse	$[kg]$																					
m	Masse	$[kg]$																					
F_s	Schubkraft	$[N]$																					
T	Zeit	$[s]$																					
g	Erdbeschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					

4.6.3 Inelastischer Stoss

	$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	<table> <tr> <td>v'</td><td>Geschw. nach Stoss</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$v_{1,2}$</td><td>v vor Stoss</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$m_{1,2}$</td><td>Massen</td><td>$[kg]$</td></tr> </table>	v'	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$
v'	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$									

4.6.4 Elastischer Stoss

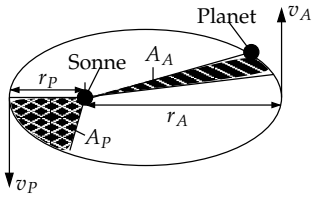
	$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$ $v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$	<table> <tr> <td>$v'_{1,2}$</td><td>Geschw. nach Stoss</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$v_{1,2}$</td><td>v vor Stoss</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$m_{1,2}$</td><td>Massen</td><td>$[kg]$</td></tr> </table>	$v'_{1,2}$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$
$v'_{1,2}$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$									

4.7 Analogie Translation und Rotation

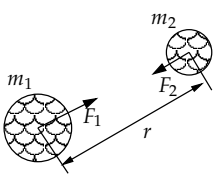
Translation			Rotation		
Symb	Grösse	Beziehung	Symb	Grösse	Beziehung
s	Weg		φ	Winkel	
v	Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	ω	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
a	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	α	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
m	Masse		J	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 dm$
p	Impuls	$p = mv$	L	Drehimpuls	$L = J\omega$
F	Kraft	$F = \frac{dp}{dt}$	M	Drehmoment	$M = \frac{dL}{dt}$
dW	Arbeit	$dW = \vec{F}d\vec{s}$	dW	Arbeit	$dW = Md\varphi$
P	Leistung	$P = \vec{F}\vec{v}$	P	Leistung	$P = M\omega$
E_{trans}	Translationsenergie	$E_{trans} = \frac{mv^2}{2}$	E_{rot}	Rotationsenergie	$E_{rot} = J\omega^2/2$

4.8 Gravitation und Masse

4.8.1 Keplersche Gesetze (→ Bewegung der Planeten)

1. Keplergesetz	Die Planeten bewegen sich auf Elypsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Bahn ist eben)	$v_{P,A}$ Bahngeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $r_{P,A}$ Elypsen-Radien $[m]$ T Umlaufdauer Planet $[s]$ C Konstante $[1]$ r mittlerer Abstand $[m]$ v_K Kreisbahngeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$ G Gravitationskonstante $= \left[\frac{m^3}{kgs^2}\right]$ $6.673 \cdot 10^{-11}$
2. Keplergesetz 	Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. $v_P r_P = v_A r_A$ $A_P = A_A$	
3. Keplergesetz	Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne. $T^2 = C r^3$ $t = \frac{4\pi}{GM_{Sonne}} r^3$ Planetengeschwindigkeit: $v_K = \frac{2\pi r}{T}$ $v_K = \sqrt{\frac{GM_{Sonne}}{r}}$	

4.8.2 Newtonsches Gravitationsgesetz

	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ $g = G \frac{m_E}{r^2} = \frac{F}{m}$	F Anziehungskraft $[N]$ $m_{1,2}$ Körpermasse $[kg]$ r Abstand $[m]$ G Gravitationskonstante $= \left[\frac{m^3}{kgs^2}\right]$ $6.673 \cdot 10^{-11}$ g Erdbeschl. $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
---	---	---

4.8.3 Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse

	$E_{\text{pot}} = -G \frac{m_Z m}{r}$ $\varphi = -\frac{G m_Z}{r}$	m_Z m-Zentralmasse [kg] m Körpermasse [kg] φ Gravitationspotential [$\frac{m^2}{s^2}$] G Gravitationskonstante = $6.673 \cdot 10^{-11}$ [$\frac{m^3}{kg s^2}$]
--	--	---

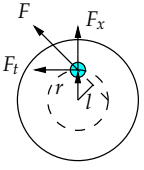
4.8.4 Fluchtgeschwindigkeit

Die Bahn ist eine Parabel	$v_F = \sqrt{2 \frac{G m_Z}{r_0}}$ $v_F = \sqrt{2} v_K$	v_F Fluchtgeschw. [$\frac{m}{s^2}$] v_K Kreisbahngeschwindigkeit [$\frac{m}{s^2}$] m_Z m-Zentralmasse [kg] r_0 Abstand [m] G Gravitationskonstante = $6.673 \cdot 10^{-11}$ [$\frac{m^3}{kg s^2}$]
---------------------------	---	--

4.8.5 Geostationäre Bahn

Ein geostationärer Satellit scheint von der Erde aus gesehen still zu stehen.	$r = \sqrt[3]{\frac{G m_P t^2}{4\pi^2}}$	r Bahnradius [m] m_P m-Planet [kg] t Umlaufzeit [s] G Gravitationskonstante = $6.673 \cdot 10^{-11}$ [$\frac{m^3}{kg s^2}$]
---	--	--

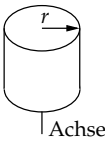
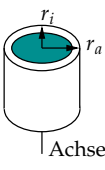
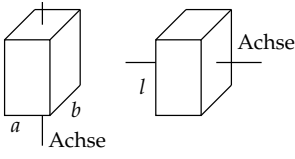
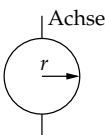
4.9 Rotation und Massenträgheitsmoment

	$M = F_t l = F r \sin(\varphi)$ $M = J \frac{d\omega}{dt} = J \alpha$ $J = \sum_i m_i r_i^2$ Satz von Steiner: $J_A = J_S + m d^2$	<table> <tr> <td>M</td><td>Drehmoment</td><td>$[Nm]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>F_t</td><td>F-tangential</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Hebelarm</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>J</td><td>Massenträgheitsmoment</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>J_A</td><td>J bez. Achse A</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>J_S</td><td>J bez. Schw.</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Winkelgeschw.</td><td>$[\frac{rad}{s}]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Abst. Drehp.</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	M	Drehmoment	$[Nm]$	F	Kraft	$[N]$	F_t	F-tangential	$[N]$	l	Hebelarm	$[m]$	J	Massenträgheitsmoment	$[kgm^2]$	J_A	J bez. Achse A	$[kgm^2]$	J_S	J bez. Schw.	$[kgm^2]$	ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	t	Zeit	$[s]$	d	Abst. Drehp.	$[m]$
M	Drehmoment	$[Nm]$																														
F	Kraft	$[N]$																														
F_t	F-tangential	$[N]$																														
l	Hebelarm	$[m]$																														
J	Massenträgheitsmoment	$[kgm^2]$																														
J_A	J bez. Achse A	$[kgm^2]$																														
J_S	J bez. Schw.	$[kgm^2]$																														
ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$																														
t	Zeit	$[s]$																														
d	Abst. Drehp.	$[m]$																														

4.9.1 Massenträgheitsmoment bei Getriebe

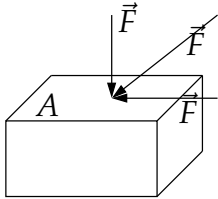
	$J_1 = \frac{J_2}{\eta_G} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{J_2}{\eta_G} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2$ $J_1 = \frac{J_2}{\eta_G i^2}$	<table> <tr> <td>J</td><td>Massenträgheit</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Winkelgeschw.</td><td>$[\frac{rad}{s}]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Drehzahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>i</td><td>Übersetzung</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	J	Massenträgheit	$[kgm^2]$	ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	n	Drehzahl	$[1]$	i	Übersetzung	$[1]$
J	Massenträgheit	$[kgm^2]$												
ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$												
n	Drehzahl	$[1]$												
i	Übersetzung	$[1]$												

4.9.2 Massenträgheitsmomente oft verwendeter Körper

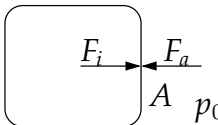
	Allgemein: $J = \int r^2 dm$	J Massenträgheitsmoment $[kgm^2]$ m Masse $[kg]$ r Radius $[m]$ a, b Seite $[m]$ l Länge $[m]$
	Vollzylinder: $J = \frac{mr^2}{2}$	
	Hohlzylinder: $J = \frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$	
	Kugel: $J = \frac{2}{5}mr^2$	
	Quader: $J = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$ Stange: $J = \frac{ml^2}{12}$	
	Kreisscheibe: $J = \frac{mr^2}{4} = \frac{md^2}{16}$	

5 Mechanik deformierbarer Körper

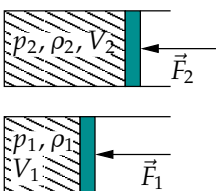
5.1 Druck

	$p = \frac{F}{A}$ $\tau = \frac{F}{A}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>τ</td><td>Schubspannung</td><td>$[Pa]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	F	Kraft	$[N]$	A	Fläche	$[m^2]$	τ	Schubspannung	$[Pa]$
p	Druck	$[Pa]$												
F	Kraft	$[N]$												
A	Fläche	$[m^2]$												
τ	Schubspannung	$[Pa]$												

5.1.1 Absoluter Druck Überdruck

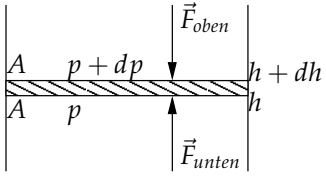
	$\Delta p = p - p_0$ $F = F_i - F_a$ $F = pA - p_0A$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>p_0</td><td>Aussendruck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 1,013 \cdot 10^5$</td><td></td></tr> <tr> <td>F_i, F_a</td><td>Kraft innen, aussen</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	p_0	Aussendruck	$[Pa]$		$= 1,013 \cdot 10^5$		F_i, F_a	Kraft innen, aussen	$[N]$	A	Fläche	$[m^2]$
p	Druck	$[Pa]$															
p_0	Aussendruck	$[Pa]$															
	$= 1,013 \cdot 10^5$																
F_i, F_a	Kraft innen, aussen	$[N]$															
A	Fläche	$[m^2]$															

5.2 Kompression

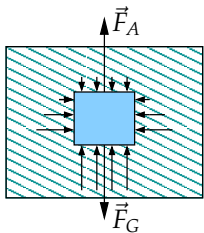
 Ideale Fluide sind inkompressibel und reibungsfrei, Gase können zusammengedrückt werden.	$\kappa = \frac{-1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$ $K = \frac{1}{\kappa}$ ideales Gas: $pV = konst.$ $p_1V_1 = p_2V_2$	<table> <tr> <td>κ</td><td>Kompressibilität</td><td>$[\frac{1}{Pa}]$</td></tr> <tr> <td>K</td><td>Kompressionsmodul</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> </table>	κ	Kompressibilität	$[\frac{1}{Pa}]$	K	Kompressionsmodul	$[Pa]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
κ	Kompressibilität	$[\frac{1}{Pa}]$															
K	Kompressionsmodul	$[Pa]$															
p	Druck	$[Pa]$															
V	Volumen	$[m^3]$															
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$															

5.3 Hydrostatik

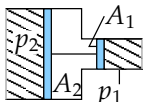
5.3.1 Schweredruck

	$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (h \text{ positiv nach oben})$ Bei Flüssigkeiten: $p = \rho gh + p_0 \quad (h \text{ positiv nach unten})$ $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p(h)}{\rho(h)}$ Bei Gasen: $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>p_0</td><td>Druck bei $h = 0$</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>ρ_0</td><td>Dichte bei $h = 0$</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschleunigung</td><td>$[\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 9.81$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	p_0	Druck bei $h = 0$	$[Pa]$	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	ρ_0	Dichte bei $h = 0$	$[\frac{kg}{m^3}]$	h	Höhe	$[m]$	g	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$			$= 9.81$
p	Druck	$[Pa]$																					
p_0	Druck bei $h = 0$	$[Pa]$																					
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																					
ρ_0	Dichte bei $h = 0$	$[\frac{kg}{m^3}]$																					
h	Höhe	$[m]$																					
g	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																					
		$= 9.81$																					

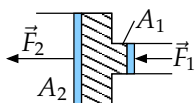
5.3.2 Statischer Auftrieb

	$F_A = \rho_{Fl} V_K g - \rho_K V_K g$ $F_A = m_{Fl} g - m_K g$ $F_A = A \rho_{Fl} g \Delta h$	<table> <tr> <td>F_A</td><td>Auftriebskraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>ρ_{Fl}</td><td>Dichte Fluid</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>ρ_K</td><td>Dichte Körper</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>m_{Fl}</td><td>Masse Fluid</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>m_K</td><td>Masse Körper</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche Körper</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschleunigung</td><td>$[\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 9.81$</td></tr> </table>	F_A	Auftriebskraft	$[N]$	ρ_{Fl}	Dichte Fluid	$[\frac{kg}{m^3}]$	ρ_K	Dichte Körper	$[\frac{kg}{m^3}]$	m_{Fl}	Masse Fluid	$[kg]$	m_K	Masse Körper	$[kg]$	A	Fläche Körper	$[m^2]$	g	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$			$= 9.81$
F_A	Auftriebskraft	$[N]$																								
ρ_{Fl}	Dichte Fluid	$[\frac{kg}{m^3}]$																								
ρ_K	Dichte Körper	$[\frac{kg}{m^3}]$																								
m_{Fl}	Masse Fluid	$[kg]$																								
m_K	Masse Körper	$[kg]$																								
A	Fläche Körper	$[m^2]$																								
g	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																								
		$= 9.81$																								

5.3.3 Druckwandler

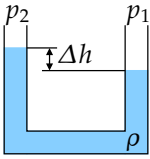
	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{A_2}{A_1}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	A	Fläche	$[m^2]$
p	Druck	$[Pa]$						
A	Fläche	$[m^2]$						

5.3.4 Kraftwandler

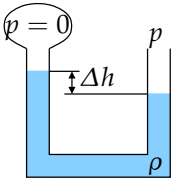
	$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[N]$	A	Fläche	$[m^2]$
F	Kraft	$[N]$						
A	Fläche	$[m^2]$						

5.3.5 Druckmessung

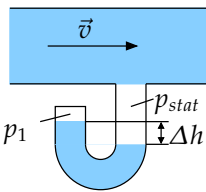
Manometer

	$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
p	Druck	$[Pa]$									
h	Höhe	$[m]$									
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$									

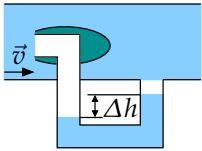
Absoluter Druck

	$p_a = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$g$</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
p	Druck	$[Pa]$															
h	Höhe	$[m]$															
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$															
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$															
		9.81															

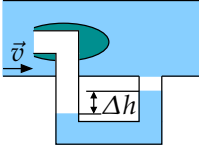
Statischer Druck (Druck auf Rohrwand)

	$p_{stat} = p_1 + \rho g \Delta h$ Falls oben offen: $p_1 = p_0$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>p_0</td><td>Aussendruck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 1.013 \cdot 10^5$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$g$</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	p_0	Aussendruck	$[Pa]$			$= 1.013 \cdot 10^5$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
p	Druck	$[Pa]$																					
p_0	Aussendruck	$[Pa]$																					
		$= 1.013 \cdot 10^5$																					
h	Höhe	$[m]$																					
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																					
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
		9.81																					

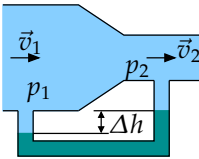
Dynamischer Druck

	$p_{ges} = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$g$</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
p	Druck	$[Pa]$															
h	Höhe	$[m]$															
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$															
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$															
		9.81															

Gesamtdruck

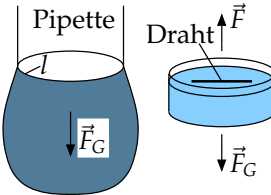
	$p_{dyn} = \rho g \Delta h$ Strömgeschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{2p_{dyn}}{\rho}}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$g$</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81		v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
p	Druck	$[Pa]$																		
h	Höhe	$[m]$																		
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																		
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																		
	9.81																			
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		

Druckdifferenzen

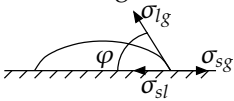
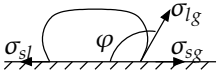
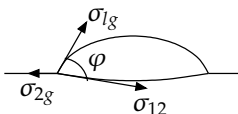
 Venturirohr	$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$ Strömgeschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]\rho}}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$g$</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	h	Höhe	$[m]$	A	Fläche	$[m^2]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81		v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
p	Druck	$[Pa]$																					
h	Höhe	$[m]$																					
A	Fläche	$[m^2]$																					
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																					
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
	9.81																						
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					

5.3.6 Grenzflächeneffekte

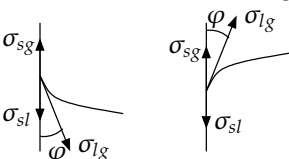
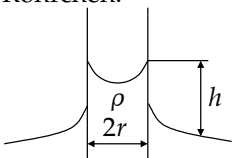
Oberflächenspannung

	$\sigma = \frac{F}{l}$ $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$ Kraft um Draht zu heben: $F = 2\sigma l + m_{Draht}g$	<table> <tr> <td>σ</td><td>Oberflächen- spannung</td><td>$\left[\frac{N}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Kontaktfläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	σ	Oberflächen- spannung	$\left[\frac{N}{m}\right]$	F	Kraft	$[N]$	l	Länge	$[m]$	A	Kontaktfläche	$[m^2]$	W	Arbeit	$[J]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81	
σ	Oberflächen- spannung	$\left[\frac{N}{m}\right]$																					
F	Kraft	$[N]$																					
l	Länge	$[m]$																					
A	Kontaktfläche	$[m^2]$																					
W	Arbeit	$[J]$																					
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
	9.81																						

Grenzflächenspannung

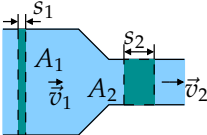
Flüssigkeit auf Festkörper Benetzung:  nicht Benetzung:  Flüssigkeit auf Flüssigkeit 	Benetzung: $\varphi < 90^\circ$ Nicht Benetzung: $\varphi > 90^\circ$ Flüssigkeit auf Festkörper $\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}}$ Flüssigkeit auf Flüssigkeit $\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{2g}^2 - \sigma_{lg}^2 - \sigma_{-2}}{2\sigma_{lg}\sigma_{l2}}$	φ Kontaktwinkel $[rad]$ σ Zugspannung $\left[\frac{N}{m}\right]$ σ_{sl} σ fest, flüssig $\left[\frac{N}{m}\right]$ σ σ fest, Gas $\left[\frac{N}{m}\right]$ σ σ flüssig, Gas $\left[\frac{N}{m}\right]$
---	--	--

Kapillarität

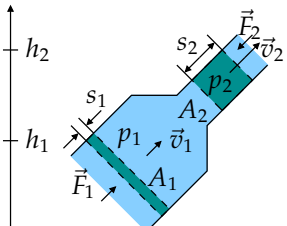
Benetzung: Nicht Benetzung:  Röhrchen: 	$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$	σ Zugspannung $\left[\frac{N}{m}\right]$ h Höhe $[m]$ r Radius $[m]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ g Erdbeschl. = $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ 9.81
--	--------------------------------	--

5.4 Hydrodynamik

5.4.1 Kontinuitätsgleichung

	$A_1 v_1 = A_2 v_2$ $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t$ $\dot{V} = v A = \text{konst}$ $s_1 = v_1 \Delta t$ $s_2 = v_2 \Delta t$	<table> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Strecke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> </table>	A	Fläche	$[m^2]$	v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$	s	Strecke	$[m]$	V	Volumen	$[m^3]$	t	Zeit	$[s]$
A	Fläche	$[m^2]$															
v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$															
s	Strecke	$[m]$															
V	Volumen	$[m^3]$															
t	Zeit	$[s]$															

5.4.2 Bernoulli Gleichung (Energieerhaltung)

	$\underbrace{p_1}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_1^2}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_1 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ $=$ $\underbrace{p_2}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_2^2}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_2 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ $p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 + gh\rho = \text{konst.}$ Mit Berücksichtigung der Reibung: $\underbrace{p_1}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2}}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_1 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ $=$ $\underbrace{p_2}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2}}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_2 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ Laminar: $\alpha = 2$ Turbulent: $\alpha \approx 1$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Höhe</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Korrekturfaktor</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$	h	Höhe	$[m]$	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	F	Kraft	$[N]$	α	Korrekturfaktor	$[1]$
p	Druck	$[Pa]$																		
v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$																		
h	Höhe	$[m]$																		
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																		
F	Kraft	$[N]$																		
α	Korrekturfaktor	$[1]$																		

5.5 Reale Strömung

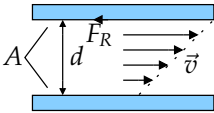
5.5.1 Zirkulation

	$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s}$	Γ Zirkulation $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ s Strecke $[m]$
--	-----------------------------------	--

5.5.2 Vortizität

	$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$	ω Vortizität $\left[\frac{1}{s}\right]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$
	Rotation der Geschwindigkeit	

5.5.3 Newtonsches Reibungsgesetz

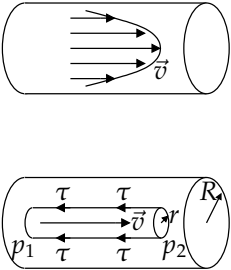
	$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$ $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ $\varphi = \frac{1}{\eta}$	τ Schubspan. $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ η Dynamische Viskosität $[Pas]$ ν Kinetische Viskosität $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ z Abst. Platten $[m]$ φ Fluidität $\left[\frac{1}{Pas}\right]$
---	--	--

5.6 Strömungsformen

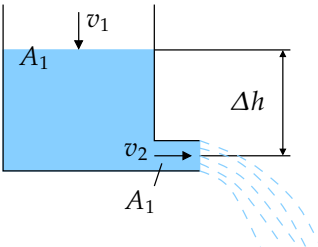
5.6.1 Reynolds-Zahl

	$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$ Im Rohr: $Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu}$ $Re_{kritisch} = 2320$	Re Reynolds-Zahl $[1]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ L Linearabm. $[m]$ d Rohr- $\emptyset$ $[m]$ η Dyn. Visk. $[Pas]$ ν Kin. Visk. $\left[\frac{m^2}{s}\right]$
--	--	--

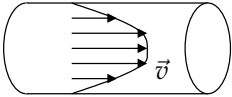
5.6.2 Laminare Strömung ($Re < 2320$)

Die Strömung ist laminar, wenn die Reynolds-Zahl $Re < 2320$ ist. 	Umströmte Kugel: $F_R = 6\pi\eta Rv$ Kugelgeschwindigkeit: $v_{Kugel} = \frac{2R^2g(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta}$ Fluidzylinder in Fluid: $v_{Zylinder} = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2)$ Durchflussmenge: $\dot{V} = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l}$ $\Delta p = p_1 - p_2$ Volumenfluss: $V = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l}t$ Druckabfall im glatten Rohr: $\Delta p = \lambda_l \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \lambda_l = \frac{64}{Re}$ Reibungskraft auf Rohr: $F_R = \Delta p R^2 \pi = 8\pi\eta l v$	F_R Reibungskraft $[N]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ r Radius Zylinder $[m]$ R Radius Kugel, Rohr $[m]$ η Dynamische Viskosität $[Pas]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ Re Reynolds-Zahl $[1]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ l Rohrlänge $[m]$ V Volumen $[m^3]$ d Rohr-Ø $[m]$ λ Widerstandszahl $[1]$ p Druck $[Pa]$ g Erdbeschl. $= \left[\frac{m}{s^2}\right]$ 9.81
--	---	---

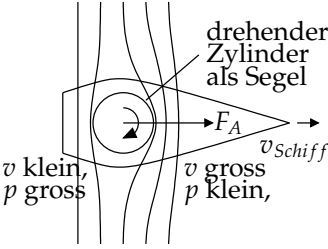
5.6.3 Volumenstrom

	$A_1 \gg A_2$ $v_1 \approx 0$ $v_2 = \sqrt{2gh}$ Volumenstrom: $\dot{V} = a_2 v_2$	h Höhe $[m]$ v Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ V Volumen $[m^3]$ A Fläche $[m^2]$ t Zeit $[s]$ g Erdbeschl. $= \left[\frac{m}{s^2}\right]$ 9.81
---	---	---

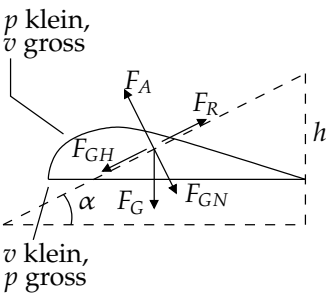
5.6.4 Turbulente Strömung ($Re > 2320$)

Die Strömung ist turbulent, wenn die Reynolds-Zahl $Re > 2320$ ist. 	Druckwiderstand: $F_D = \frac{c_W \rho v^2}{2} A$ Druckabfall im glatten Rohr: $\Delta p = \lambda_t \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}$	<table> <tr> <td>F_D</td><td>Druckwiderst.</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Angriffsfläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>c_W</td><td>Widerstands-koeffizient</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$Re$</td><td>Raynolds-Zahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$l$</td><td>Rohrlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Rohr-$\emptyset$</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>λ</td><td>Widerstands-zahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	F_D	Druckwiderst.	$[N]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	A	Angriffsfläche	$[m^2]$	c_W	Widerstands-koeffizient	$[1]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Re	Raynolds-Zahl	$[1]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	l	Rohrlänge	$[m]$	d	Rohr- $\emptyset$	$[m]$	λ	Widerstands-zahl	$[1]$	p	Druck	$[Pa]$	g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
F_D	Druckwiderst.	$[N]$																																							
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																							
A	Angriffsfläche	$[m^2]$																																							
c_W	Widerstands-koeffizient	$[1]$																																							
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																							
Re	Raynolds-Zahl	$[1]$																																							
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																							
l	Rohrlänge	$[m]$																																							
d	Rohr- $\emptyset$	$[m]$																																							
λ	Widerstands-zahl	$[1]$																																							
p	Druck	$[Pa]$																																							
g	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																																							
		9.81																																							

5.7 Dynamischer Auftrieb

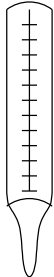
Beispiel: Schiff mit Zylinder-Segel: 	Bei Zylinderform: $F_A = \rho l v \Gamma$ $\Gamma = 4\pi^2 r^2 f$	<table> <tr> <td>F_A</td><td>Auftriebskraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Zylinderlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Fluidgeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Drehfrequenz Zylinder</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\Gamma$</td><td>Zirkulaion</td><td>$\left[\frac{m^2}{s}\right]$</td></tr> </table>	F_A	Auftriebskraft	$[N]$	l	Zylinderlänge	$[m]$	r	Radius	$[m]$	v	Fluidgeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	f	Drehfrequenz Zylinder	$\left[\frac{1}{s}\right]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Γ	Zirkulaion	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
F_A	Auftriebskraft	$[N]$																					
l	Zylinderlänge	$[m]$																					
r	Radius	$[m]$																					
v	Fluidgeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
f	Drehfrequenz Zylinder	$\left[\frac{1}{s}\right]$																					
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																					
Γ	Zirkulaion	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$																					

5.7.1 Tragflügel

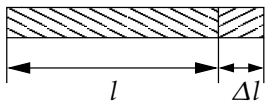
Tragflügel: 	Auftrieb: $F_A = c_A \frac{\rho v^2}{2} A_T$ Induzierter Widerstand: $F_W = c_W \frac{\rho v^2}{2} A_T$ $F_R = F_{GH} = F_G \sin(\alpha)$ $F_A = F_{GN} = F_G \cos(\alpha)$ $\frac{c_W}{c_A} = \frac{\text{Höhenverlust}}{\text{Meter Flug}}$	<table> <tr> <td>F_A</td><td>Auftriebskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td>F_W</td><td>Widerstandskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td>c_A</td><td>Auftriebskoeffizient</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>c_W</td><td>Widerstandskoeffizient</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>A_T</td><td>Fläche aus Anströmrichtung gesehen</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte Fluid</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\alpha$</td><td>Gleitwinkel</td><td>[rad]</td></tr> </table>	F_A	Auftriebskraft	[N]	F_W	Widerstandskraft	[N]	c_A	Auftriebskoeffizient	[1]	c_W	Widerstandskoeffizient	[1]	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	A_T	Fläche aus Anströmrichtung gesehen	$[m^2]$	ρ	Dichte Fluid	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	α	Gleitwinkel	[rad]
F_A	Auftriebskraft	[N]																								
F_W	Widerstandskraft	[N]																								
c_A	Auftriebskoeffizient	[1]																								
c_W	Widerstandskoeffizient	[1]																								
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																								
A_T	Fläche aus Anströmrichtung gesehen	$[m^2]$																								
ρ	Dichte Fluid	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																								
α	Gleitwinkel	[rad]																								

6 Wärmelehre

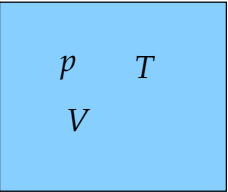
6.1 Temperatur

	Absolute Temperatur: $T = \frac{2}{3k} \bar{E}_{kin}$ $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ Umrechnungen: $T(K) = T(C) + 273.15$ $T(F) = \frac{9}{5} T(C) + 32$ $T(C) = \frac{5}{9} (T(F) - 32)$	<table> <tr> <td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>$[\frac{J}{K}]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$1.381 E^{-23}$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>E_{kin}</td><td>kinetische Energie der Gasatome</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschwindigkeit</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>Kelvin</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td></td><td>Celsius</td><td>$[^{\circ}C]$</td></tr> <tr> <td></td><td>Fahrenheit</td><td>$[F]$</td></tr> </table>	T	Temperatur	$[K]$	k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$			$1.381 E^{-23}$	m	Masse	$[kg]$	E_{kin}	kinetische Energie der Gasatome	$[J]$	v	Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$		Kelvin	$[K]$		Celsius	$[^{\circ}C]$		Fahrenheit	$[F]$
T	Temperatur	$[K]$																											
k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																											
		$1.381 E^{-23}$																											
m	Masse	$[kg]$																											
E_{kin}	kinetische Energie der Gasatome	$[J]$																											
v	Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$																											
	Kelvin	$[K]$																											
	Celsius	$[^{\circ}C]$																											
	Fahrenheit	$[F]$																											

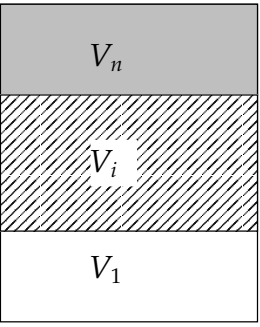
6.2 Ausdehnung von Materialien

	Längenausdehnung: $\Delta l = \alpha l \Delta T$ Volumenausdehnung: $\Delta V = \gamma V \Delta T$ $\gamma = 3\alpha = \frac{\Delta V}{V \Delta T}$ $\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\gamma \Delta T}$ $\sigma = E \alpha \Delta T = E \frac{\Delta l}{l}$	<table> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Längenausd. koef.</td><td>$[\frac{1}{K}]$</td></tr> <tr> <td>γ</td><td>Volumenausd. koef.</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>ΔT</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Spannung bzw. Druck</td><td>$[\frac{N}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Elastizitätsmodul</td><td>$[\frac{N}{m^2}]$</td></tr> </table>	l	Länge	$[m]$	V	Volumen	$[m^3]$	α	Längenausd. koef.	$[\frac{1}{K}]$	γ	Volumenausd. koef.	$[m^3]$	ΔT	Temperatur	$[K]$	σ	Spannung bzw. Druck	$[\frac{N}{m^2}]$	E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
l	Länge	$[m]$																					
V	Volumen	$[m^3]$																					
α	Längenausd. koef.	$[\frac{1}{K}]$																					
γ	Volumenausd. koef.	$[m^3]$																					
ΔT	Temperatur	$[K]$																					
σ	Spannung bzw. Druck	$[\frac{N}{m^2}]$																					
E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$																					

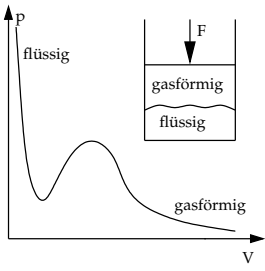
6.3 Ideale Gase

	$pV = \text{konst.}$ $\frac{V}{T} = \text{konst.}$ $\frac{pV}{T} = \text{konst.}$ $pV = NkT$ $N = nN_A$ $R = N_A k$ $pV = nRT$ $m = nM$ $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$V$</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Anz. Moleküle</td><td></td></tr> <tr> <td>n</td><td>Anz. Mol</td><td></td></tr> <tr> <td>m</td><td>Gasmasse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Molmasse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr> <td>$N_A$</td><td>Anz. Atome pro 12g C</td><td>$\frac{1}{mol}$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 6,022 \cdot 10^{23}$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.=</td><td>$\left[\frac{J}{K}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$1,381 \cdot 10^{-23}$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 8,314$</td></tr> </table>	p	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	V	Volumen	$[m^3]$	T	Temperatur	$[K]$	N	Anz. Moleküle		n	Anz. Mol		m	Gasmasse	$[kg]$	M	Molmasse	$[kg]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	N_A	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$			$= 6,022 \cdot 10^{23}$	k	Boltzmann-konst.=	$\left[\frac{J}{K}\right]$			$1,381 \cdot 10^{-23}$	R	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$			$= 8,314$
p	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																																										
V	Volumen	$[m^3]$																																										
T	Temperatur	$[K]$																																										
N	Anz. Moleküle																																											
n	Anz. Mol																																											
m	Gasmasse	$[kg]$																																										
M	Molmasse	$[kg]$																																										
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																										
N_A	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$																																										
		$= 6,022 \cdot 10^{23}$																																										
k	Boltzmann-konst.=	$\left[\frac{J}{K}\right]$																																										
		$1,381 \cdot 10^{-23}$																																										
R	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																										
		$= 8,314$																																										
	Volumen eines idealen Gases: $22,4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$ bei $p = 10133 Pa$ und $T = 273,15 K$																																											

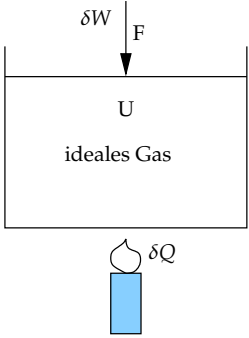
6.4 Gemische idealer Gase

	$\sum_{i=1}^z p_i = p$ $p_i = q_i p$ $M = \sum_{i=1}^z q_i M_i$ $\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$	<table> <tr> <td>p</td><td>(Gesamt-) Druck</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$p_i$</td><td>Partialdruck</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$q$</td><td>Konzentration</td><td>$\left[\frac{1}{K}\right]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Molmasse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>μ_i</td><td>Massenkonzentration</td><td></td></tr> </table>	p	(Gesamt-) Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	p_i	Partialdruck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	q	Konzentration	$\left[\frac{1}{K}\right]$	M	Molmasse	$[kg]$	μ_i	Massenkonzentration	
p	(Gesamt-) Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$															
p_i	Partialdruck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$															
q	Konzentration	$\left[\frac{1}{K}\right]$															
M	Molmasse	$[kg]$															
μ_i	Massenkonzentration																

6.5 Reale Gase

	$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$ $p = n \frac{RT}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2}$ $a = 3p_k V_{mk}^2 = \frac{9}{8} RT_k V_{mk}$ $b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{RT_k}{8p_k}$ $T_k = \frac{8a}{27Rb}$ $p_k = \frac{a}{27b^2}$ $V_{mk} = 3b$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$V_m$</td><td>Molvolumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> <tr> <td>$T$</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Anz. Mol</td><td></td></tr> <tr> <td>a</td><td>Van der Waal-konst.</td><td>$[Nm]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Van der Waal-konst.</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>T_k</td><td>Kritische Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>p_k</td><td>Kritischer Druck</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$V_{mk}$</td><td>Kritisches Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> </table>	p	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	V_m	Molvolumen	$[m^3]$	R	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	T	Temperatur	$[K]$	n	Anz. Mol		a	Van der Waal-konst.	$[Nm]$	b	Van der Waal-konst.	$[m^3]$	T_k	Kritische Temperatur	$[K]$	p_k	Kritischer Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	V_{mk}	Kritisches Volumen	$[m^3]$
p	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																														
V_m	Molvolumen	$[m^3]$																														
R	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																														
T	Temperatur	$[K]$																														
n	Anz. Mol																															
a	Van der Waal-konst.	$[Nm]$																														
b	Van der Waal-konst.	$[m^3]$																														
T_k	Kritische Temperatur	$[K]$																														
p_k	Kritischer Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																														
V_{mk}	Kritisches Volumen	$[m^3]$																														

6.6 Wärme

	$dU = \delta W + \delta Q$ $\delta Q = CdT$ $\delta Q = cmdT$ $\delta Q = C_m n dT$ $C = mc$ $C_m = Mc$ $C_{mp} - C_{mv} = R$ $m = nM$	<table> <tr> <td>U</td><td>Innere Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Wärmekapazität</td><td>$\left[\frac{J}{K}\right]$</td></tr> <tr> <td>C_m</td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> <tr> <td>$C_{mv}$</td><td>$C_m$, isochor ¹</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> <tr> <td>$C_{mp}$</td><td>$C_m$, isobar ²</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> <tr> <td>$c$</td><td>spez. Wärmekapazität</td><td>$\left[\frac{J}{kgK}\right]$</td></tr> <tr> <td>$m$</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>$M$</td><td>Molmasse</td><td>$\left[\frac{kg}{mol}\right]$</td></tr> <tr> <td>$n$</td><td>Anz. Mol</td><td></td></tr> <tr> <td>R</td><td>Univers.-Gk. = 8.314</td><td>$\left[\frac{J}{molK}\right]$</td></tr> </table>	U	Innere Energie	$[J]$	W	Arbeit	$[J]$	Q	Wärme	$[J]$	C	Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{K}\right]$	C_m	Molare Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	C_{mv}	C_m , isochor ¹	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	C_{mp}	C_m , isobar ²	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	c	spez. Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kgK}\right]$	m	Masse	$[kg]$	M	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$	n	Anz. Mol		R	Univers.-Gk. = 8.314	$\left[\frac{J}{molK}\right]$
U	Innere Energie	$[J]$																																				
W	Arbeit	$[J]$																																				
Q	Wärme	$[J]$																																				
C	Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{K}\right]$																																				
C_m	Molare Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
C_{mv}	C_m , isochor ¹	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
C_{mp}	C_m , isobar ²	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
c	spez. Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kgK}\right]$																																				
m	Masse	$[kg]$																																				
M	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$																																				
n	Anz. Mol																																					
R	Univers.-Gk. = 8.314	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				

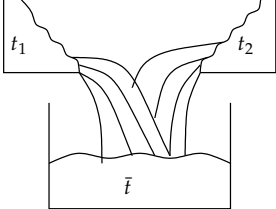
¹Isochore Prozesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Volumen

²Isobare Prozesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Druck

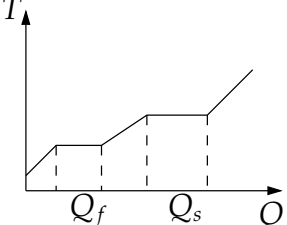
6.6.1 Molare Wärme kristalliner Festkörper

	falls $T > \Theta_D$: $C_{mv} = 3R$ falls $T \ll \Theta_D$: $C_{mv} = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3$	C_{mv} C_m , isochor $\left[\frac{J}{molK} \right]$ T Temperatur $[K]$ Θ_D Debye-Temp. $[K]$ R Univers.-Gaskonst. $\left[\frac{J}{molK} \right]$
--	---	--

6.6.2 Austausch von Wärmemengen

	$\bar{t} = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots}$	$\bar{t}$ Mischtemp. $[K]$ t Temperatur $[K]$ m Masse $[kg]$ c spez. Wärmekapazität $\left[\frac{J}{kgK} \right]$
--	---	---

6.7 Phasen und Phasenübergänge

	Schmelzen: $Q = mQ_s \quad q_s = \frac{Q_s}{m}$ Verdampfen: $Q = mQ_v \quad q_v = \frac{Q_v}{m}$ $\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$ $\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$	Q Wärme $[J]$ m Masse $[kg]$ Q_s Schmelzenergie $[J]$ Q_v Verdampfenergie $[J]$ q_s spez. Schmelz Q $\left[\frac{J}{kg} \right]$ q_v spez. Verdampf Q $\left[\frac{J}{kg} \right]$ p_s Dampfdruck $[Pa]$ p_f Schmelzdruck $[Pa]$ T Temperatur $[K]$ ρ_g Dichte Phase gasförmig $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$ ρ_f Dichte Phase flüssig $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$ ρ_s Dichte Phase fest $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
---	---	---

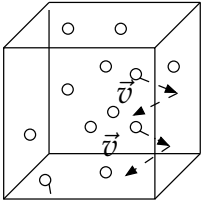
6.7.1 Schmelz- und Verdampfungsenergien

Substanz	$T_{\text{schmelz}} [K]$	$Q_s [\frac{kJ}{kg}]$	$T_{\text{verdampf}} [K]$	$Q_v [\frac{kJ}{kg}]$
Blei	600	24,7	2023	858
Brom	266	67,4	332	369
Ethanol	159	109	351	879
Gold	1336	62,8	3081	1701
Helium	-	-	4,2	21
Kohlendioxid	-	-	194.6	573
Kupfer	1356	205	2839	4726
Quecksilber	234	11,3	630	296
Sauerstoff	54,4	13,8	90,2	213
Schwefel	388	38,5	717,75	287
Silber	1234	105	2436	2323
Stickstoff	63	25,7	77,35	199
Wasser	273,15	333,5	373,15	2257
Zink	692	102	1184	1768

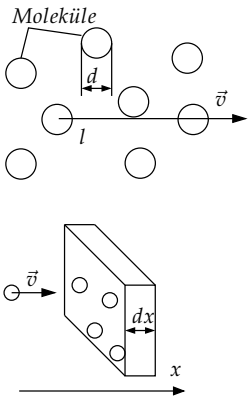
6.8 Luftfeuchtigkeit

	$f = \frac{m_W}{V}$ $f_r = \frac{m_W}{m_s} = \frac{p_D}{p_s} (\cdot 100\%)$ $p_s = p_{s0} 10^{\frac{7,5\vartheta}{\vartheta+237}} \quad , \vartheta \geq 0^\circ\text{C}$ $p_s = p_{s0} 10^{\frac{9,5\vartheta}{\vartheta+265,5}} \quad , \vartheta \leq 0^\circ\text{C}$ $p_D = p_s(\vartheta_d)$ $\vartheta = \frac{237 \log \frac{p_s}{6,107}}{7,5 - \log \frac{p_s}{6,107}} , p_s \geq 610,7 \text{ Pa}$ $\vartheta = \frac{265,5 \log \frac{p_s}{6,107}}{9,5 - \log \frac{p_s}{6,107}} , p_s \leq 610,7 \text{ Pa}$	f Luftfeuchtigkeit absolut $[\frac{kg}{m^3}]$ f_r Luftfeuchtigkeit relativ $[1]$ m_W Wasserdampfmasse $[kg]$ m_s Dampfmasse im Sättigungszustand $[\frac{kg}{m^3}]$ V Volumen $[m^3]$ p_D Partialdruck Wasserdampf $[Pa]$ p_s Sättigungsdruck Wasserdampf $[Pa]$ ϑ Temperatur $[^\circ\text{C}]$ p_{s0} 61070 $[Pa]$
--	--	--

6.9 Kinetische Gastheorie

 Molekül Einatomige Moleküle haben keine Rotationsenergie, deshalb ist in diesem Fall: $E_{kin} = E_{trans}$	Translationsenergie: $\bar{E}_{kin} = N \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT$ $U = N_A \bar{E} = N_A \frac{f}{2} kT = \frac{f}{2} RT$ $U = E_{kin} + E_{pot}$ $pV = \frac{2}{3} N_A \frac{mv^2}{2}$ Mittlere Energie pro Molekül: $\bar{E} = \frac{f}{2} kT$ $\bar{E}_{kin} \approx T_{abs}$ $C_{mv} = \frac{f}{2} R$ f=3 bei einatomigen Molekülen f=5 bei zweiatomigen Molekülen f=6 bei mehratomigen Molekülen Volumen eines idealen Gases: $22.4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$ bei $p = 10133 Pa$ und $T = 273.15 K$	<table> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Anz. Moleküle</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Anz. Mol</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Molekül Geschwindigkeit</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> <tr> <td>E_{kin}</td><td>Kinetische Energie der Moleküle</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>E_{pot}</td><td>Potentielle Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Innere Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>T_{abs}</td><td>Temperatur absolut</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Freiheitsgrad</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>C_{mv}</td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr> <td>N_A</td><td>Anz. Atome pro 12g C</td><td>$\frac{1}{mol}$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 6,022 \cdot 10^{23}$</td><td></td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>$[\frac{J}{K}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 1,381 \cdot 10^{-23}$</td><td></td></tr> <tr> <td>R</td><td>Univers.-Gk.</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 8.314$</td><td></td></tr> </table>	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$	N	Anz. Moleküle	$[1]$	n	Anz. Mol	$[1]$	v	Molekül Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$	E_{kin}	Kinetische Energie der Moleküle	$[J]$	E_{pot}	Potentielle Energie	$[J]$	U	Innere Energie	$[J]$	T_{abs}	Temperatur absolut	$[K]$	T	Temperatur	$[K]$	f	Freiheitsgrad	$[1]$	m	Masse	$[kg]$	C_{mv}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$	N_A	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$		$= 6,022 \cdot 10^{23}$		k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$		$= 1,381 \cdot 10^{-23}$		R	Univers.-Gk.	$[\frac{J}{molK}]$		$= 8.314$	
p	Druck	$[Pa]$																																																									
V	Volumen	$[m^3]$																																																									
N	Anz. Moleküle	$[1]$																																																									
n	Anz. Mol	$[1]$																																																									
v	Molekül Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$																																																									
E_{kin}	Kinetische Energie der Moleküle	$[J]$																																																									
E_{pot}	Potentielle Energie	$[J]$																																																									
U	Innere Energie	$[J]$																																																									
T_{abs}	Temperatur absolut	$[K]$																																																									
T	Temperatur	$[K]$																																																									
f	Freiheitsgrad	$[1]$																																																									
m	Masse	$[kg]$																																																									
C_{mv}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$																																																									
N_A	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$																																																									
	$= 6,022 \cdot 10^{23}$																																																										
k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																																																									
	$= 1,381 \cdot 10^{-23}$																																																										
R	Univers.-Gk.	$[\frac{J}{molK}]$																																																									
	$= 8.314$																																																										

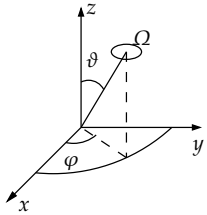
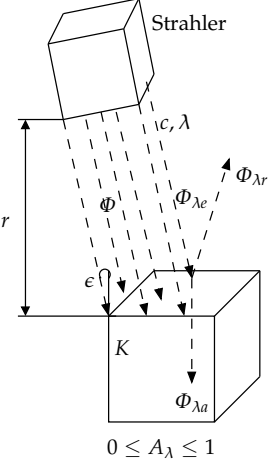
6.9.1 Mittlere freie Weglänge, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität

	$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$ $N = N_0 e^{-x/\bar{\lambda}}$ Wahrscheinlichkeit $f(x)dx$, dass ein Molekül einen freien Weg auf der Strecke dx hat: $f(x)dx = n\sigma e^{-x/\bar{\lambda}}dx$ $\sigma = \pi d^2$ $\lambda_Q = \frac{1}{6}n\bar{v}\bar{\lambda}fk$ $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$	<table> <tr> <td>$\bar{\lambda}$</td><td>Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Anz. Moleküle (≠ Anz. Mole)</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Ø-Molekül</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Anz. Moleküle durch Schicht dx</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Querschnitt</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>$\bar{\lambda}_Q$</td><td>Wärmeleitungskoeff.</td><td>$[\frac{W}{m^2K}]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>v - Moleküle</td><td>$[m/s]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Freiheitsgrad</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>$[\frac{J}{K}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 1,381 \cdot 10^{-23}$</td><td></td></tr> <tr> <td>D</td><td>Diffusionskonst.</td><td>$[\frac{m^2}{s}]$</td></tr> <tr> <td>η</td><td>Viskosität</td><td>$[\frac{kg}{ms}]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$[\frac{kg}{m^3}]$</td></tr> </table>	$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss	$[m]$	n	Anz. Moleküle (≠ Anz. Mole)	$[1]$	d	Ø-Molekül	$[m]$	N	Anz. Moleküle durch Schicht dx	$[1]$	σ	Querschnitt	$[m^2]$	$\bar{\lambda}_Q$	Wärmeleitungskoeff.	$[\frac{W}{m^2K}]$	v	v - Moleküle	$[m/s]$	f	Freiheitsgrad	$[1]$	k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$		$= 1,381 \cdot 10^{-23}$		D	Diffusionskonst.	$[\frac{m^2}{s}]$	η	Viskosität	$[\frac{kg}{ms}]$	ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss	$[m]$																																							
n	Anz. Moleküle (≠ Anz. Mole)	$[1]$																																							
d	Ø-Molekül	$[m]$																																							
N	Anz. Moleküle durch Schicht dx	$[1]$																																							
σ	Querschnitt	$[m^2]$																																							
$\bar{\lambda}_Q$	Wärmeleitungskoeff.	$[\frac{W}{m^2K}]$																																							
v	v - Moleküle	$[m/s]$																																							
f	Freiheitsgrad	$[1]$																																							
k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																																							
	$= 1,381 \cdot 10^{-23}$																																								
D	Diffusionskonst.	$[\frac{m^2}{s}]$																																							
η	Viskosität	$[\frac{kg}{ms}]$																																							
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																																							

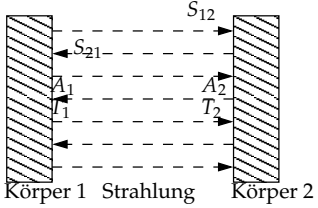
6.9.2 Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

	Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ aufweist: $f(v)dv = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3 T^3}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$ $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\bar{v}^2}$ $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 2\sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}$	<table> <tr> <td>$f(v)$</td><td>Dichtefunktion</td><td></td></tr> <tr> <td>m</td><td>Molekülmasse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>v - Moleküle</td><td>$[m/s]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>freie Weglänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>$[\frac{J}{K}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>$= 1,381 \cdot 10^{-23}$</td><td></td></tr> <tr> <td>v_0</td><td>v-wahrscheinlichst</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> <tr> <td>u</td><td>spez. $\bar{v}$</td><td>$[\frac{m}{s}]$</td></tr> </table>	$f(v)$	Dichtefunktion		m	Molekülmasse	$[kg]$	v	v - Moleküle	$[m/s]$	T	freie Weglänge	$[m]$	k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$		$= 1,381 \cdot 10^{-23}$		v_0	v-wahrscheinlichst	$[\frac{m}{s}]$	u	spez. $\bar{v}$	$[\frac{m}{s}]$
$f(v)$	Dichtefunktion																									
m	Molekülmasse	$[kg]$																								
v	v - Moleküle	$[m/s]$																								
T	freie Weglänge	$[m]$																								
k	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																								
	$= 1,381 \cdot 10^{-23}$																									
v_0	v-wahrscheinlichst	$[\frac{m}{s}]$																								
u	spez. $\bar{v}$	$[\frac{m}{s}]$																								

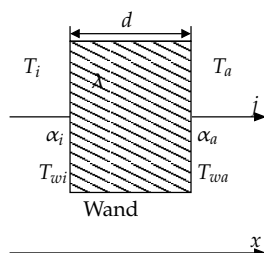
6.10 Temperaturstrahlung, Strahlungsgesetze

  0 ≤ A_λ ≤ 1	$\Omega = \frac{A}{R^2} \quad I = \frac{\Phi}{\Omega}$ $E = \frac{\Phi}{A}$ $A_\lambda = \frac{\Phi_{\lambda a}}{\Phi_{\lambda e}}$ $K = \int_{HR} L(\vartheta, \varphi) \cos(\vartheta) d\Omega$ Diffuse Strahlung: $K = L \int_{HR} L \cos(\vartheta) d\Omega = L\pi$ HR = Halbraum : z > 0 $\frac{K_\lambda(\lambda, T)}{A_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$ $K_\lambda = \epsilon_\lambda(\lambda, T) K_{\lambda s}(\lambda, T)$ $\epsilon_\lambda(\lambda, T) \equiv A_\lambda(\lambda, T)$ Körper schwarz: K_s = σT⁴ Körper grau: K = εσT⁴, A = ε $P_e = \epsilon_\lambda \sigma A T^4$ $P_{e\text{Netto}} = \epsilon_\lambda \sigma A (T^4 - T_0^4)$ $K_{\nu s}(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} d\nu$ $K_{\lambda s}(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} d\lambda$ $\lambda_{\max} T = b$ $\nu = c/\lambda$ $E_{Str} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} c_0}{\lambda}$	<table> <tr> <td>Ω</td><td>Raumwinkel</td><td>[sr]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche, Flächenausschnitt</td><td>[m²]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Kugelradius</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strahlstärke</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Strahlungsstrom</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Bestrahlungsstärke</td><td>[$\frac{W}{m^2}$]</td></tr> <tr> <td>K</td><td>Emmissionsvermögen</td><td>[$\frac{W}{m^2}$]</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Strahldichte</td><td>[$\frac{W}{m^2 sr}$]</td></tr> <tr> <td>A_λ</td><td>Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A_λ = 1)</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ε_λ</td><td>Emissionsverhältn.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>ν</td><td>Frequenz</td><td>[Hz]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temp. Körper</td><td>[K]</td></tr> <tr> <td>T₀</td><td>Umgebungstemp.</td><td>[K]</td></tr> <tr> <td>P_e</td><td>Strahlungsleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>E_{Str}</td><td>Strahlungsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmannkonst.</td><td>[$\frac{J}{K}$]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 1,381 · 10⁻²³</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Boltzmannkonst.</td><td>[$\frac{W}{m^2 K}$]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 5,671 · 10⁻⁸</td></tr> <tr> <td>h</td><td>Plancksche Konst.</td><td>[Js]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 6,626 · 10⁻³⁴</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Konst.</td><td>[mK]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 2,898 · 10⁻³</td></tr> <tr> <td>c₀</td><td>Lichtgeschw. (Vakuum)</td><td>[$\frac{m}{s}$]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 299'792'458</td></tr> </table>	Ω	Raumwinkel	[sr]	A	Fläche, Flächenausschnitt	[m ²]	R	Kugelradius	[m]	I	Strahlstärke	[W]	Φ	Strahlungsstrom	[W]	E	Bestrahlungsstärke	[$\frac{W}{m^2}$]	K	Emmissionsvermögen	[$\frac{W}{m^2}$]	L	Strahldichte	[$\frac{W}{m^2 sr}$]	A _λ	Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A _λ = 1)	[1]	ε _λ	Emissionsverhältn.	[1]	λ	Wellenlänge	[m]	ν	Frequenz	[Hz]	T	Temp. Körper	[K]	T ₀	Umgebungstemp.	[K]	P _e	Strahlungsleistung	[W]	E _{Str}	Strahlungsenergie	[J]	k	Boltzmannkonst.	[$\frac{J}{K}$]			= 1,381 · 10 ⁻²³	σ	Boltzmannkonst.	[$\frac{W}{m^2 K}$]			= 5,671 · 10 ⁻⁸	h	Plancksche Konst.	[Js]			= 6,626 · 10 ⁻³⁴	b	Konst.	[mK]			= 2,898 · 10 ⁻³	c ₀	Lichtgeschw. (Vakuum)	[$\frac{m}{s}$]			= 299'792'458
Ω	Raumwinkel	[sr]																																																																														
A	Fläche, Flächenausschnitt	[m ²]																																																																														
R	Kugelradius	[m]																																																																														
I	Strahlstärke	[W]																																																																														
Φ	Strahlungsstrom	[W]																																																																														
E	Bestrahlungsstärke	[$\frac{W}{m^2}$]																																																																														
K	Emmissionsvermögen	[$\frac{W}{m^2}$]																																																																														
L	Strahldichte	[$\frac{W}{m^2 sr}$]																																																																														
A _λ	Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A _λ = 1)	[1]																																																																														
ε _λ	Emissionsverhältn.	[1]																																																																														
λ	Wellenlänge	[m]																																																																														
ν	Frequenz	[Hz]																																																																														
T	Temp. Körper	[K]																																																																														
T ₀	Umgebungstemp.	[K]																																																																														
P _e	Strahlungsleistung	[W]																																																																														
E _{Str}	Strahlungsenergie	[J]																																																																														
k	Boltzmannkonst.	[$\frac{J}{K}$]																																																																														
		= 1,381 · 10 ⁻²³																																																																														
σ	Boltzmannkonst.	[$\frac{W}{m^2 K}$]																																																																														
		= 5,671 · 10 ⁻⁸																																																																														
h	Plancksche Konst.	[Js]																																																																														
		= 6,626 · 10 ⁻³⁴																																																																														
b	Konst.	[mK]																																																																														
		= 2,898 · 10 ⁻³																																																																														
c ₀	Lichtgeschw. (Vakuum)	[$\frac{m}{s}$]																																																																														
		= 299'792'458																																																																														

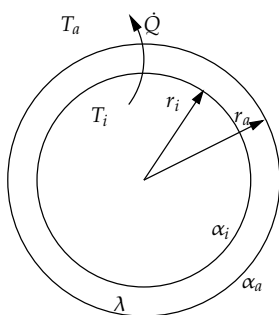
6.10.1 Strahlungsaustausch

 Körper 1 Strahlung Körper 2	$j = C_{12}(T_1^4 - T_2^4) = S_{12} - S_{21}$ $j = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \sigma$ $C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \sigma$	<table> <tr> <td>C_{12}</td><td>Strahlungsaustauschzahl</td><td>$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$</td></tr> <tr> <td>$T$</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Entropie</td><td>$\left[\frac{J}{\text{m}^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$A$</td><td>Absortionszahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Emissionsverhältnis</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>j</td><td>Wärmestromdichte</td><td>$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\sigma$</td><td>Boltzmannkonst.</td><td>$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>$= 5,671 \cdot 10^{-8}$</td></tr> </table>	C_{12}	Strahlungsaustauschzahl	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$	T	Temperatur	$[K]$	S	Entropie	$\left[\frac{J}{\text{m}^2}\right]$	A	Absortionszahl	$[1]$	ϵ	Emissionsverhältnis	$[K]$	j	Wärmestromdichte	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	σ	Boltzmannkonst.	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$			$= 5,671 \cdot 10^{-8}$
C_{12}	Strahlungsaustauschzahl	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$																								
T	Temperatur	$[K]$																								
S	Entropie	$\left[\frac{J}{\text{m}^2}\right]$																								
A	Absortionszahl	$[1]$																								
ϵ	Emissionsverhältnis	$[K]$																								
j	Wärmestromdichte	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$																								
σ	Boltzmannkonst.	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}\right]$																								
		$= 5,671 \cdot 10^{-8}$																								

6.11 Wärmetransport



Wärmeübergang	α
Wandflächen innen	8
Wandflächen aussen	20
Boden, Decke nach oben	8
Boden, Decke nach unten	6



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$$

$$I = \dot{Q} = \lambda A \frac{dT}{dx} = jA$$

$$\Delta T = IR$$

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A}$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Wandschicht:

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_{wi} - T_{wa}}{d}$$

Übergangsschicht innen:

$$j = \alpha_i (T_i - T_{wi})$$

Übergangsschicht aussen:

$$j = \alpha_a (T_{wa} - T_a)$$

$$j = k (T_i - T_a)$$

$$\dot{Q}_w = Aj = Ak\Delta T$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_s \frac{d_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_a}} = \frac{j}{\Delta T}$$

Für zylinderförmige Wand:

$$\dot{Q} = 2\pi r l j = 2\pi r_a l k_a \Delta T$$

$$k_a = \frac{1}{r_a \frac{1}{r_i \alpha_i} + \sum_s \frac{1}{\lambda_s} \ln \frac{r_{sa}}{r_{si}} + \frac{1}{r_a \alpha_a}}$$

Wärmebedarf eines Gebäudes:

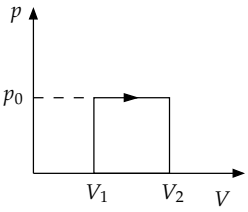
$$Q = \left(\sum_w A_w k_w + \rho c_p \dot{V} \right) G$$

$$G = \int_{\text{Heizsaison}} \Delta T dt$$

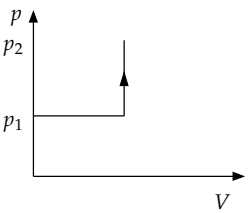
I	Wärmestrom	$[W]$
R	Wärmewiderstand	$\left[\frac{K}{W}\right]$
j	Wärmestromdichte	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$
λ	Wärmeleitkoeff.	$\left[\frac{W}{mK}\right]$
T_L	Luft-Temperatur	$[K]$
T_W	Wand-Temperatur	$[K]$
$T_{i,a}$	Innen- / Aussen-Temperatur	$[K]$
t	Zeit	$[s]$
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
d	Wanddurchm.	$[m]$
α	Wärmeübergang	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
k	k-Wert, Wärmedurchgangszahl	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
Q	Wärmebedarf	$[J]$
A	Wandfläche	$[m^2]$
$\dot{V}$	Luftaustausch	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
G	Heiztage	$[Kd]$
r	Zylinderradius	$[m]$
l	Zylinderlänge	$[m]$

6.12 Zustandsänderungen

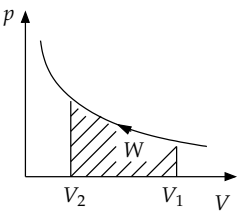
6.12.1 Isobare Zustandsänderung

 Isobar: $p = \text{konstant}$	$Q = nC_{mp}(T_2 - T_1)$ $W = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$ $W = p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV$	<table> <tr><td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr><td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr><td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr><td>C_{mp}</td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr><td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr><td>n</td><td>Anz. Mol Gas</td><td>$[1]$</td></tr> <tr><td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr><td>R</td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> </table>	Q	Wärme	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$	C_{mp}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$	T	Temperatur	$[K]$	n	Anz. Mol Gas	$[1]$	W	Arbeit	$[J]$	R	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$
Q	Wärme	$[J]$																								
p	Druck	$[Pa]$																								
V	Volumen	$[m^3]$																								
C_{mp}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$																								
T	Temperatur	$[K]$																								
n	Anz. Mol Gas	$[1]$																								
W	Arbeit	$[J]$																								
R	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$																								

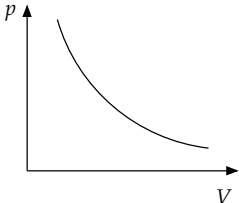
6.12.2 Isochore Zustandsänderungen

 Isochor: $V = \text{konstant}$	$Q = nC_{mv}(T_2 - T_1)$ $W = 0$	<table> <tr><td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr><td>C_{mv}</td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr><td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr><td>n</td><td>Anz. Mol Gas</td><td>$[1]$</td></tr> <tr><td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> </table>	Q	Wärme	$[J]$	C_{mv}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$	T	Temperatur	$[K]$	n	Anz. Mol Gas	$[1]$	W	Arbeit	$[J]$
Q	Wärme	$[J]$															
C_{mv}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$															
T	Temperatur	$[K]$															
n	Anz. Mol Gas	$[1]$															
W	Arbeit	$[J]$															

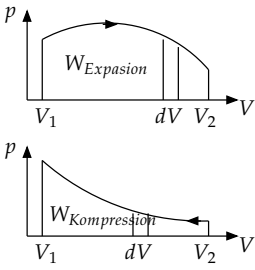
6.12.3 Isotherme Zustandsänderungen

 isotherm: $T = \text{konst.}$	Expansion: $Q_{ab} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = W_{ab}$ Kompression: $Q_{zu} = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = W_{zu}$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$ $ W_{zu} = Q_{ab} $	<table> <tr><td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr><td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr><td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr><td>n</td><td>Anz. Mol Gas</td><td>$[1]$</td></tr> <tr><td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr><td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr><td>R</td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> </table>	Q	Wärme	$[J]$	V	Volumen	$[m^3]$	T	Temperatur	$[K]$	n	Anz. Mol Gas	$[1]$	W	Arbeit	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	R	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$
Q	Wärme	$[J]$																					
V	Volumen	$[m^3]$																					
T	Temperatur	$[K]$																					
n	Anz. Mol Gas	$[1]$																					
W	Arbeit	$[J]$																					
p	Druck	$[Pa]$																					
R	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$																					

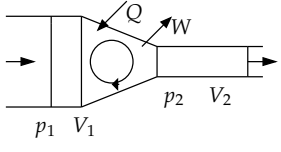
6.12.4 Adiabatische Zustandsänderungen

 Adiabatisch: $Q = konst.$ (kein Wärmeaustausch)	$dU = \delta Q - \delta W$ $pV^\kappa = konst.$ $\rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa$ $TV^{\kappa-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$ $T^\kappa p^{1-\kappa} \text{ und } T p^{\frac{1}{\kappa}-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$ $\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$ $\kappa = \frac{f+2}{f} \quad C_{mv} = \frac{f}{2}R$ $W = nC_{mv}(T_1 - T_2)$ $\Delta W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$ $\Delta W = C_{mv}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$	<table> <tr> <td>U</td><td>Innere Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>κ</td><td>Adiabatene exponent</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>C_{mv}</td><td>Molare Wärmekapazität isochor</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr> <td>C_{mp}</td><td>Molare Wärmekapazität isobar</td><td>$[\frac{J}{molK}]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Freiheitsgrad</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Anz. Mol</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> </table>	U	Innere Energie	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$	κ	Adiabatene exponent	$[1]$	C_{mv}	Molare Wärmekapazität isochor	$[\frac{J}{molK}]$	C_{mp}	Molare Wärmekapazität isobar	$[\frac{J}{molK}]$	T	Temperatur	$[K]$	f	Freiheitsgrad	$[1]$	n	Anz. Mol	$[1]$	W	Arbeit	$[J]$
U	Innere Energie	$[J]$																														
p	Druck	$[Pa]$																														
V	Volumen	$[m^3]$																														
κ	Adiabatene exponent	$[1]$																														
C_{mv}	Molare Wärmekapazität isochor	$[\frac{J}{molK}]$																														
C_{mp}	Molare Wärmekapazität isobar	$[\frac{J}{molK}]$																														
T	Temperatur	$[K]$																														
f	Freiheitsgrad	$[1]$																														
n	Anz. Mol	$[1]$																														
W	Arbeit	$[J]$																														

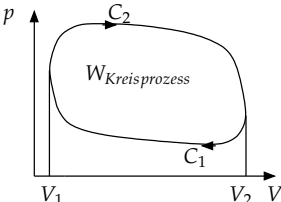
6.12.5 Expansion und Kompression

	Expansion: $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = A_1$ Kompression: $W = \int_{V_2}^{V_1} p dV = -A_2$	<table> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> </table>	W	Arbeit	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$
W	Arbeit	$[J]$									
p	Druck	$[Pa]$									
V	Volumen	$[m^3]$									

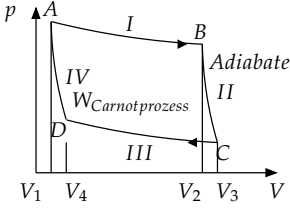
6.12.6 Enthalpie

 Maschine	$H = U + pV$ $W = Q - \Delta H$ $W_{tot} = W_g + p_2 V_2 - p_1 V_1$ Isotherm: $W = W_g$ Adiabatisch: $W = \kappa W_g$	<table> <tr> <td>H</td><td>Enthalpie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>W_g</td><td>W im abgeschlossenen System</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> <tr> <td>κ</td><td>Adiabaten exp.</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	H	Enthalpie	$[J]$	W	Arbeit	$[J]$	W_g	W im abgeschlossenen System	$[J]$	Q	Wärme	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$	κ	Adiabaten exp.	$[1]$
H	Enthalpie	$[J]$																					
W	Arbeit	$[J]$																					
W_g	W im abgeschlossenen System	$[J]$																					
Q	Wärme	$[J]$																					
p	Druck	$[Pa]$																					
V	Volumen	$[m^3]$																					
κ	Adiabaten exp.	$[1]$																					

6.13 Kreisprozesse

 Rechtslaufend (Uhrzeigersinn): Wärmekraftmaschine Linkslaufend: Wärmepumpe	$W = \underbrace{\int_{V_1}^{V_2} p dV}_{\text{Kurve } C_1} + \underbrace{\int_{V_2}^{V_1} p dV}_{\text{Kurve } C_2}$ $W = \oint \delta W = \oint \delta Q$ $Q = W$	<table> <tr> <td>W</td><td>Arbeit</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Wärme</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Druck</td><td>$[Pa]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> </table>	W	Arbeit	$[J]$	Q	Wärme	$[J]$	p	Druck	$[Pa]$	V	Volumen	$[m^3]$
W	Arbeit	$[J]$												
Q	Wärme	$[J]$												
p	Druck	$[Pa]$												
V	Volumen	$[m^3]$												

6.13.1 Carnotprozess

 Beispiel Motor: $T_1 = T_{\text{Zylinder}}$ $T_2 = T_{\text{Abgas}}$	I: Isotherme Expansion: $W_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_{zu}$ $U = \text{konst.}$ II: Adiabatische Expansion: $W_{ab} = C_{mv}(T_1 - T_2)$ $Q_{zu} = 0$ III: Isotherme Kompression: $W_{zu} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = Q_{ab}$ $U = \text{konst.}$ IV: Adiabatische Kompression: $W_{zu} = C_{mv}(T_1 - T_2)$ $Q_{zu} = 0$ $\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ Carnot-Wärmepumpe: $\epsilon_C = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ Carnot-Kältemaschine: $\epsilon_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$	W Arbeit [J] Q Wärme [J] U Innere Energie [J] V Volumen [m^3] C_{mv} Molare Wärmekapazität isochor [$\frac{J}{molK}$] R Univers.-Gaskonst. [$\frac{J}{molK}$] η_C Carnot-Wirkungsgrad (bei Wärmekraftmaschine) [1] ϵ_C Carnot-Leistungszahl (bei Wärmepumpe) [1]
---	---	---

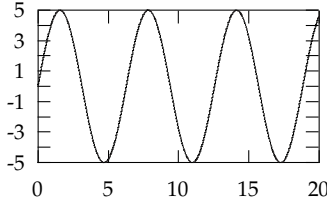
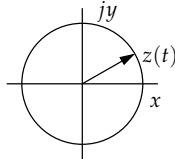
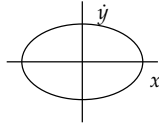
6.14 Entropie

Im abgeschlossenen System gilt: • S kann niemals abnehmen. • Bei allen Vorgängen nimmt S zu oder bleibt gleich. • Der Zustand wo S maximal ist, ist der stabile Zustand.	$S = S_0 + \int_0^P \frac{\delta Q_r}{T}$ $dS = \frac{\delta Q_r}{T}$ $\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_r}{T}$ $S = k \cdot \ln(W)$	S Entropie $[\frac{J}{K}]$ P Punkt P $[1]$ Q_r Wärme $[J]$ T Temperatur $[K]$ W Wahrscheinlichkeit $[1]$
---	---	---

7 Schwingungen

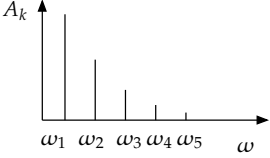
7.1 Freie Schwingungen

7.1.1 Ungedämpfte, harmonische Schwingung

Zeitfunktion:  Zeigerbild:  Phasenkurve: 	Funktion: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f$ $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung: $a(t) = \ddot{y} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$ $v(t) = \dot{y} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ Energie bleibt konstant: $E_{ges} = \frac{1}{2}cA^2 = E_{pot} + E_{kin}$ $E_{pot} = \frac{1}{2}cA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ $E_{kin} = \frac{1}{2}cA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]^1$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Nullphasenwinkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Frequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$v$</td><td>Geschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Konstante</td><td>$\left[\frac{N}{m}\right]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]^1$	A	Amplitude	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$	t	Zeit	$[s]$	T	Periode	$[s]$	f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	E	Energie	$[J]$	c	Konstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$
y	schwingende Grösse	$[m]^1$																																	
A	Amplitude	$[1]$																																	
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$																																	
t	Zeit	$[s]$																																	
T	Periode	$[s]$																																	
f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																																	
v	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																	
E	Energie	$[J]$																																	
c	Konstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$																																	

¹m gilt nur bei mechanischen Schwingungen

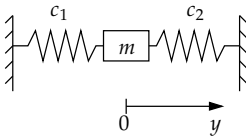
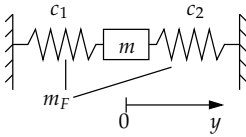
7.1.2 Ungedämpfte, periodische Schwingung

	Fourierreihe: $y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ $\omega_k = k\omega_1$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ $y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)]$ $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Nullphasenwinkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode der Grundschwingung</td><td>$[s]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	A	Amplitude	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$	T	Periode der Grundschwingung	$[s]$
y	schwingende Grösse	$[m]$															
A	Amplitude	$[1]$															
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$															
φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$															
T	Periode der Grundschwingung	$[s]$															

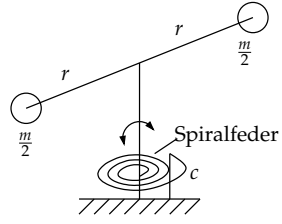
7.1.3 Ungedämpfte, nicht periodische Schwingung

	Fourierreihe: $y = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	A	Amplitude	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	t	Zeit	$[s]$
y	schwingende Grösse	$[m]$												
A	Amplitude	$[1]$												
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$												
t	Zeit	$[s]$												

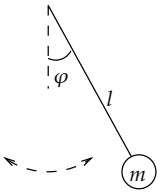
7.1.4 Federpendel

	Federmasse vernachlässigt: $m\ddot{y} + cy = 0$ $y = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ $a(t) = -\left(\frac{c}{m}\right) y(t)$ Energiesatz: $\frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}cy^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t)$	<table><tr><td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr><tr><td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr><tr><td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr><tr><td>φ</td><td>Nullphasenwinkel</td><td>$[rad]$</td></tr><tr><td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr><tr><td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr><tr><td>f</td><td>Frequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr><tr><td>m</td><td>Bewegte Masse</td><td>$[kg]$</td></tr><tr><td>m_F</td><td>Masse der Feder</td><td>$[kg]$</td></tr><tr><td>c</td><td>Federkonstante (siehe S. 14)</td><td>$\left[\frac{N}{m}\right]$</td></tr><tr><td>a</td><td>Beschleunigung</td><td>$\left[\frac{m}{s^2}\right]$</td></tr></table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	A	Amplitude	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$	t	Zeit	$[s]$	T	Periode	$[s]$	f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	m	Bewegte Masse	$[kg]$	m_F	Masse der Feder	$[kg]$	c	Federkonstante (siehe S. 14)	$\left[\frac{N}{m}\right]$	a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
y	schwingende Grösse	$[m]$																																	
A	Amplitude	$[1]$																																	
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$																																	
t	Zeit	$[s]$																																	
T	Periode	$[s]$																																	
f	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
m	Bewegte Masse	$[kg]$																																	
m_F	Masse der Feder	$[kg]$																																	
c	Federkonstante (siehe S. 14)	$\left[\frac{N}{m}\right]$																																	
a	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																																	
	Mit Federmasse: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{c}}$																																		

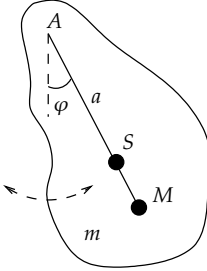
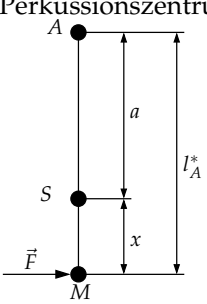
7.1.5 Drehpendel

	$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}$ bestimmung von Massenträgheitsmomenten: $J_{unbek} = J_{bek} \frac{T_{unbek}^2}{T_{bek}^2}$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Nullphasenwinkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Federkonstante</td><td>$\left[\frac{N}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>J</td><td>Massenträgheitsmoment</td><td>$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$	T	Periode	$[s]$	c	Federkonstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$	J	Massenträgheitsmoment	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$
y	schwingende Grösse	$[m]$																		
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																		
φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$																		
T	Periode	$[s]$																		
c	Federkonstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$																		
J	Massenträgheitsmoment	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$																		

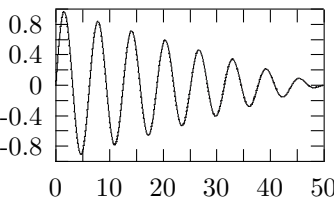
7.1.6 Mathematisches Pendel

	$l\ddot{\varphi} + g \sin(\varphi) = 0$ $l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Pendellänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= [\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	φ	Winkel	$[rad]$	T	Periode	$[s]$	l	Pendellänge	$[m]$	g	Erdbeschl.	$= [\frac{m}{s^2}]$			9.81
y	schwingende Grösse	$[m]$																					
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
φ	Winkel	$[rad]$																					
T	Periode	$[s]$																					
l	Pendellänge	$[m]$																					
g	Erdbeschl.	$= [\frac{m}{s^2}]$																					
		9.81																					

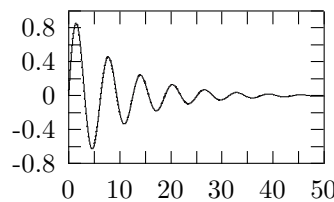
7.1.7 Physikalisches Pendel

 Perkussionszentrum 	$J_A \ddot{\varphi} + mga \sin(\varphi) = 0$ $l^* = \frac{J_A}{ma}$ $J_A \ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_A}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_S + ma^2}{mga}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{g(m_1a_1 + m_2a_2)}}$ $J_A = J_S + ma^2$ $\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{2}} \sqrt{\frac{m}{J_S}}$ $\omega(A) = \omega(M)$ $x = \frac{J_S}{ma}$ $E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$	<table> <tr> <td>J_A</td><td>Masseträgheit bez. A-Achse</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>J_S</td><td>Masseträgheit bez. Achse a (siehe S. 29)</td><td>$[kgm^2]$</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Schwerpunkt</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>a</td><td>Anstand zu S</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>l^*</td><td>Pendellänge des entspr. math. Pendel</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Frequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Bewegte Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum</td><td></td></tr> <tr> <td>x</td><td>Abstand M,S</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Erdbeschl.</td><td>$= [\frac{m}{s^2}]$</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	J_A	Masseträgheit bez. A-Achse	$[kgm^2]$	J_S	Masseträgheit bez. Achse a (siehe S. 29)	$[kgm^2]$	S	Schwerpunkt	$[1]$	a	Anstand zu S	$[m]$	T	Periode	$[s]$	l^*	Pendellänge des entspr. math. Pendel	$[m]$	y	schwingende Grösse	$[m]$	A	Amplitude	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	φ	Winkel	$[rad]$	t	Zeit	$[s]$	f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$	m	Bewegte Masse	$[kg]$	E	Energie	$[J]$	M	Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum		x	Abstand M,S	$[m]$	g	Erdbeschl.	$= [\frac{m}{s^2}]$			9.81
J_A	Masseträgheit bez. A-Achse	$[kgm^2]$																																																						
J_S	Masseträgheit bez. Achse a (siehe S. 29)	$[kgm^2]$																																																						
S	Schwerpunkt	$[1]$																																																						
a	Anstand zu S	$[m]$																																																						
T	Periode	$[s]$																																																						
l^*	Pendellänge des entspr. math. Pendel	$[m]$																																																						
y	schwingende Grösse	$[m]$																																																						
A	Amplitude	$[1]$																																																						
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																																						
φ	Winkel	$[rad]$																																																						
t	Zeit	$[s]$																																																						
f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$																																																						
m	Bewegte Masse	$[kg]$																																																						
E	Energie	$[J]$																																																						
M	Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum																																																							
x	Abstand M,S	$[m]$																																																						
g	Erdbeschl.	$= [\frac{m}{s^2}]$																																																						
		9.81																																																						

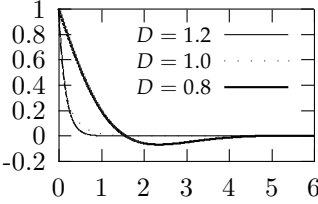
7.1.8 Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibung

	$\Delta A = 4 \frac{F_R}{c}$ $m\ddot{y} + cy + F_R = 0$	<table> <tr> <td>ΔA</td><td>Δ Amplitude</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td></td><td>pro Periode</td><td></td></tr> <tr> <td>F_R</td><td>Reibkraft</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Federkonstante</td><td>$[\frac{N}{m}]$</td></tr> </table>	ΔA	Δ Amplitude	$[m]$		pro Periode		F_R	Reibkraft	$[\frac{1}{s}]$	c	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$
ΔA	Δ Amplitude	$[m]$												
	pro Periode													
F_R	Reibkraft	$[\frac{1}{s}]$												
c	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$												

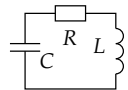
7.1.9 Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ($D < 1$)

	$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ $y = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$ $\delta = \frac{b}{2m} \quad F_R = -b\dot{y}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ $D = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1 + (\frac{\Lambda}{2\pi})^2}}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}$ $\Lambda = \delta T$ $\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta T}$ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>δ</td><td>Abklingkonst.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Dämpfungs-konst.</td><td>$[\frac{kg}{s}]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Federkonst.</td><td>$[\frac{N}{m}]$</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Dämpfungs-grad</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>log. Dekre-ment</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Energie</td><td>$[J]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	φ	Winkel	$[rad]$	T	Periode	$[s]$	δ	Abklingkonst.	$[1]$	b	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$	m	Masse	$[kg]$	c	Federkonst.	$[\frac{N}{m}]$	D	Dämpfungs-grad	$[1]$	Λ	log. Dekre-ment	$[1]$	A	Amplitude	$[1]$	E	Energie	$[J]$
y	schwingende Grösse	$[m]$																																				
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																				
φ	Winkel	$[rad]$																																				
T	Periode	$[s]$																																				
δ	Abklingkonst.	$[1]$																																				
b	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$																																				
m	Masse	$[kg]$																																				
c	Federkonst.	$[\frac{N}{m}]$																																				
D	Dämpfungs-grad	$[1]$																																				
Λ	log. Dekre-ment	$[1]$																																				
A	Amplitude	$[1]$																																				
E	Energie	$[J]$																																				

7.1.10 Aperiodeische Lösung ($D > 1$)

	$y = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t}$ $\lambda_1 = -\omega_0(D + \sqrt{D^2 - 1})$ $\lambda_2 = -\omega_0(D - \sqrt{D^2 - 1})$ Grenzfall $D = 1$ $\frac{c}{m} = \frac{b^2}{4m^2}$ $y = (b_1 + b_2 t) e^{-\delta t}$	<table> <tr> <td>y</td><td>schwingende Grösse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>δ</td><td>Abklingkonst.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>b</td><td>Dämpfungs-konst.</td><td>$[\frac{kg}{s}]$</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Dämpfungs-grad</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>m</td><td>Masse</td><td>$[kg]$</td></tr> <tr> <td>c</td><td>Federkonstante</td><td>$[\frac{N}{m}]$</td></tr> </table>	y	schwingende Grösse	$[m]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	δ	Abklingkonst.	$[1]$	b	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$	D	Dämpfungs-grad	$[1]$	m	Masse	$[kg]$	c	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$
y	schwingende Grösse	$[m]$																					
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
δ	Abklingkonst.	$[1]$																					
b	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$																					
D	Dämpfungs-grad	$[1]$																					
m	Masse	$[kg]$																					
c	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$																					

7.1.11 Elektrischer Schwingkreis

	$I = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$ $\delta = \frac{R}{2L}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ $\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$	<table> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[H]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>δ</td><td>Abklingkonst.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Dämpfungs-grad</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	I	Strom	$[A]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	L	Induktivität	$[H]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	δ	Abklingkonst.	$[1]$	t	Zeit	$[s]$	D	Dämpfungs-grad	$[1]$
I	Strom	$[A]$																					
R	Widerstand	$[\Omega]$																					
L	Induktivität	$[H]$																					
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
δ	Abklingkonst.	$[1]$																					
t	Zeit	$[s]$																					
D	Dämpfungs-grad	$[1]$																					

8 Wellenlehre

8.1 Wellengeschwindigkeiten

Elastische Longitudinalwellen	$u_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	u Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$
Elastische Transversalwellen	$u_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	A Fläche $\left[m^2\right]$
Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite	$u_T = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$	E Elastizitätsmodul $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
Schwerewellen in tiefem Wasser	$u_S = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	F Spannkraft $[N]$
Schwerewellen in flachem Wasser	$u_S = \sqrt{gh}$	G Schubmodul $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
Kapillarwellen	$u_K = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$	h Wassertiefe $[m]$
Schallwellen in Fluiden	$u = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$	M Molmasse $\left[\frac{kg}{mol}\right]$
Schallwellen in Gasen	$u_G = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$	p Druck $[Pa]$
	$u_G = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$	T abs. Temp. $[K]$
		κ Kompressibilität $\left[\frac{m^2}{N}\right]$
		κ Adiabatenexponent $[1]$
		λ Wellenlänge $[m]$
		ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
		σ Oberflächenspannung $\left[\frac{N}{m}\right]$
		g Erdbeschl. = $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ 9.81
		R univers. Gas-Konst. $\left[\frac{J}{Kmol}\right]$ = 8.3145

8.1.1 Zusammenhänge der verschiedenen Wellen

Gilt nur bei einem Stab	$u_T = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} u_L$	u Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ u_T u longitudinal $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ u_L u transversal $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ μ Poissonzahl $[1]$
-------------------------	---------------------------------------	--

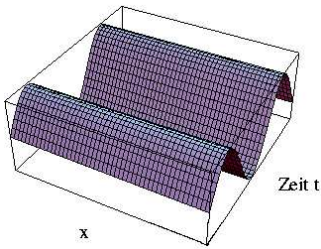
8.2 Wellengleichung

Bei Wellengleichungen (lineare Dgl) gilt das Superpositionsprinzip, d.h. die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung.	Eindimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Zweidimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Dreidimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ oder: $\Delta \xi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ wobei: $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	u Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ ξ Störung $[...]$ t Zeit $[s]$ Δ Laplace-OP $[]$
--	--	---

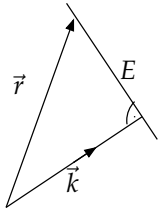
8.3 Intensität

	$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 \xi_0^2$	I Intensität $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ u Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ ξ Störung $[...]$ ρ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ ω Winkelgeschw. $\left[\frac{1}{s}\right]$
--	---	--

8.4 Harmonische Wellen

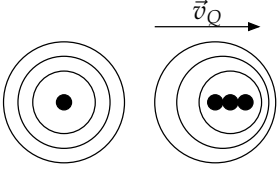
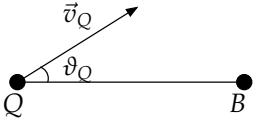
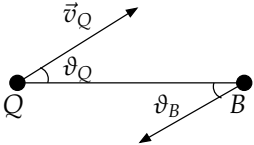
 $\xi = f(x - ut) \rightarrow$ <i>Ausbreitung pos. x - Koord.</i> $\xi = f(x + ut) \rightarrow$ <i>Ausbreitung neg. x - Koord.</i> Bei EM - Wellen: $u = c = 299'792'458 \frac{m}{s}$	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = ku$ $k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$ $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$ $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{u}{f}$ $u = \frac{\omega}{k} = \lambda f$	<table> <tr> <td>u</td><td>Wellengeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>ξ</td><td>Störung</td><td>$[...]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Wellenzahl</td><td>$\left[\frac{1}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>f</td><td>Frequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> </table>	u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	ξ	Störung	$[...]$	t	Zeit	$[s]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	T	Periode	$[s]$	λ	Wellenlänge	$[m]$	φ	Phase	$[rad]$	k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{m}\right]$	f	Frequenz	$[Hz]$
u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																											
ξ	Störung	$[...]$																											
t	Zeit	$[s]$																											
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																											
T	Periode	$[s]$																											
λ	Wellenlänge	$[m]$																											
φ	Phase	$[rad]$																											
k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{m}\right]$																											
f	Frequenz	$[Hz]$																											

8.5 Räumliche Ausbreitung von Wellen

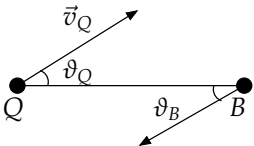
	Ebene Welle: $\xi(x, y, z, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ $\vec{k}\vec{r} = konst.$ Kugel Welle: $\xi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$	<table> <tr> <td>ξ</td><td>Störung</td><td>$[...]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Wellenzahl</td><td>$\left[\frac{1}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>$[...]$</td></tr> </table>	ξ	Störung	$[...]$	t	Zeit	$[s]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{m}\right]$	r	Radius	$[m]$	A	Amplitude	$[...]$
ξ	Störung	$[...]$																		
t	Zeit	$[s]$																		
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																		
k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{m}\right]$																		
r	Radius	$[m]$																		
A	Amplitude	$[...]$																		

8.6 Doppler-Effekt

8.6.1 Akustischer Doppler-Effekt

 ruhende und bewegte Punktquelle  bewegte Punktquelle  bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle	bewegte Quelle, ruhender Beobachter: $f' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{u}} f \quad - \text{ auf Hörer zu}$ $f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cos(\vartheta_Q)} f$ ruhende Quelle, bewegter Beobachter: $f' = (1 \pm \frac{v_B}{u}) f \quad + \text{ auf Quelle zu}$ $f' = (1 + \frac{v_B}{u} \cos(\vartheta_B)) f$ Allgemein: $f_B = \frac{u + v_B \cos(\vartheta_B)}{u - v_Q \cos(\vartheta_Q)} f_Q$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ f Frequenz $[Hz]$ f' gehörte Frequenz $[Hz]$ v_Q Geschw. Quelle $[\frac{m}{s}]$ v_B Geschw. Beobachter $[\frac{m}{s}]$ ϑ Winkel $[rad]$
--	--	---

8.6.2 Optischer Doppler-Effekt

 bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle	$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)} f$ $\beta = \frac{v}{c}$ falls $f \gg c$: $\frac{f - f'}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c}$ falls $\vartheta = 0^\circ$ oder $\vartheta = 180^\circ$: $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}$	f Frequenz $[Hz]$ f' gesehene Frequenz $[Hz]$ v Geschw. relativ Beobachter Quelle $[\frac{m}{s}]$ ϑ Winkel $[rad]$ c Lichtgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ $= 299'792'458$
--	---	--

8.6.3 Machscher Kegel

	Falls $v > u$ entsteht ein Machscher Kegel $\sin(\vartheta) = \frac{u}{v}$ $M = \frac{v}{u}$	<table> <tr> <td>u</td><td>Wellengeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschw. Flugzeug</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>ϑ</td><td>Winkel des Kegels</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Machzahl</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	v	Geschw. Flugzeug	$\left[\frac{m}{s}\right]$	ϑ	Winkel des Kegels	$[rad]$	M	Machzahl	$[1]$
u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$												
v	Geschw. Flugzeug	$\left[\frac{m}{s}\right]$												
ϑ	Winkel des Kegels	$[rad]$												
M	Machzahl	$[1]$												

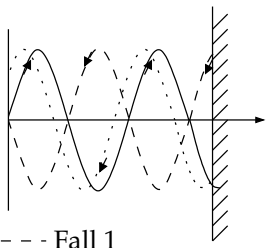
8.7 Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz

	$l = nr$ In 1s geht Energie S durch $1m^2$: $S = \frac{\delta \xi^2 \omega^2}{2} u$ Prinzip von Huygens: Jedes Flächenelement auf einer Welle kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden. Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende all dieser Elementarwellen.	<table> <tr> <td>u</td><td>Wellengeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Optische Weglänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Brechungsindex</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Energie</td><td>$\left[\frac{J}{m^2s}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\xi$</td><td>Störung</td><td>$[...]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> </table>	u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	l	Optische Weglänge	$[m]$	n	Brechungsindex	$[1]$	S	Energie	$\left[\frac{J}{m^2s}\right]$	ξ	Störung	$[...]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$
u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
l	Optische Weglänge	$[m]$																		
n	Brechungsindex	$[1]$																		
S	Energie	$\left[\frac{J}{m^2s}\right]$																		
ξ	Störung	$[...]$																		
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																		
	Bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium findet ein Phasensprung von π statt. Beispiel: Falls Medium 1 dichter Medium 2 dichter Medium 3: Phasensprung in P und Q. $\Rightarrow +\frac{\lambda}{2}$ → Auslöschung bei $m\frac{\lambda}{2}$, $m = \{1, 3, 5, \dots\}$																			

8.8 Optische Länge

Durchqueren Wellen Medien muss mit optischen Längen gerechnet werden	$s \rightarrow ns$ $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$	n Brech-Index $[1]$ s Strecke $[m]$ λ Wellenlänge $[m]$
--	---	---

8.9 Stehende Wellen

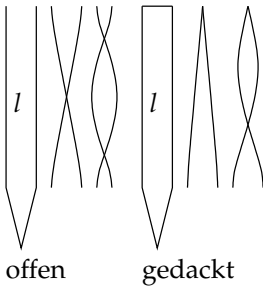
 - - - Fall 1 ···· Fall 2 Einfallende Welle wird von Grenzfläche reflektiert	1. Fall: Phasensprung π bei Reflexion $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) + \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $2\xi \sin(k_x) \cos(\omega t)$ Knoten bei $k_x = 0, \pi, 2\pi \dots$ Bäuche bei: $k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \dots$ 2. Fall: Kein Phasensprung $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) - \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $-2\xi \cos(k_x) \sin(\omega t)$ Knoten bei $k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \dots$ Bäuche bei: $k_x = 0, \pi, 2\pi \dots$	ξ Störung $[...]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ t Zeit $[s]$ k Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$
--	--	---

8.10 Eigenschwingungen

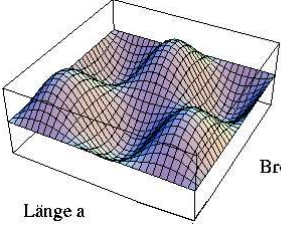
8.10.1 Saite

 — $\lambda = 2l$ - - - $\lambda = l$ Die Saite ist zweiseitig fixiert	$\lambda_n = \frac{2l}{n}$ $f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2l}n = nf_1$ $f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ $u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ $F = \frac{4l^2}{n^2} \rho A f^2$ Bei Temperatur Änderung: $\Delta f = \left(\frac{E_{Sa}(\alpha_{Trag} - \alpha_{Sa})}{8\rho_{Sa}l^2f^2} - \alpha_{Trag} \right) \Delta T f$	<table> <tr><td>u</td><td>Wellengeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr><td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr><td>F</td><td>Spannkraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr><td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>Dichte Saite</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr><td>$\xi$</td><td>Störung</td><td>$[...]$</td></tr> <tr><td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr><td>f</td><td>Frequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> <tr><td>f_1</td><td>Grundfrequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> <tr><td>l</td><td>Saitenlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>n</td><td>n-te Harmonische</td><td>$[1]$</td></tr> <tr><td>α</td><td>Längenausd. koef.</td><td>$\left[\frac{1}{K}\right]$</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>Dichte</td><td>$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$</td></tr> <tr><td>$E$</td><td>Elastizitätsmodul</td><td>$\left[\frac{N}{m^2}\right]$</td></tr> </table>	u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	A	Fläche	$[m^2]$	F	Spannkraft	$[N]$	λ	Wellenlänge	$[m]$	ρ	Dichte Saite	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ξ	Störung	$[...]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	f	Frequenz	$[Hz]$	f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$	l	Saitenlänge	$[m]$	n	n-te Harmonische	$[1]$	α	Längenausd. koef.	$\left[\frac{1}{K}\right]$	ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
u	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																										
A	Fläche	$[m^2]$																																										
F	Spannkraft	$[N]$																																										
λ	Wellenlänge	$[m]$																																										
ρ	Dichte Saite	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																										
ξ	Störung	$[...]$																																										
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																										
f	Frequenz	$[Hz]$																																										
f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$																																										
l	Saitenlänge	$[m]$																																										
n	n-te Harmonische	$[1]$																																										
α	Längenausd. koef.	$\left[\frac{1}{K}\right]$																																										
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																										
E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																																										

8.10.2 Pfeife

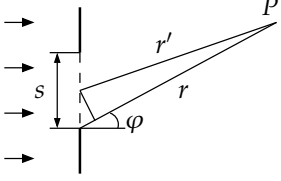
 offen gedackt	offene Pfeife: $f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \frac{u}{2l}$ $f_n = nf_1$ $\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$ gedackte Pfeife: $f_1 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \frac{u}{4l}$ $f_n = nf_1$ $\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 2, 4, 6, \dots$	<table> <tr><td>f</td><td>Frequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> <tr><td>f_1</td><td>Grundfrequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> <tr><td>M</td><td>Molmasse</td><td>$\left[\frac{kg}{mol}\right]$</td></tr> <tr><td>$T$</td><td>abs. Temp.</td><td>$[K]$</td></tr> <tr><td>κ</td><td>Adiabatenexponent</td><td>$[1]$</td></tr> <tr><td>R</td><td>univers. Gas-Konst.</td><td>$\left[\frac{J}{Kmol}\right]$</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>$= 8.3145$</td></tr> <tr><td>l</td><td>Saitenlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	f	Frequenz	$[Hz]$	f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$	M	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$	T	abs. Temp.	$[K]$	κ	Adiabatenexponent	$[1]$	R	univers. Gas-Konst.	$\left[\frac{J}{Kmol}\right]$			$= 8.3145$	l	Saitenlänge	$[m]$	λ	Wellenlänge	$[m]$
f	Frequenz	$[Hz]$																											
f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$																											
M	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$																											
T	abs. Temp.	$[K]$																											
κ	Adiabatenexponent	$[1]$																											
R	univers. Gas-Konst.	$\left[\frac{J}{Kmol}\right]$																											
		$= 8.3145$																											
l	Saitenlänge	$[m]$																											
λ	Wellenlänge	$[m]$																											

8.10.3 Rechteckige Membrane

 Länge a Breite b m=3, n=2	$f(x, y) = \xi_0 \sin(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y)$ $k_x a = m\pi \quad k_y b = n\pi$ $f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$	<table> <tr><td>f_{mn}</td><td>Eigenfrequenz</td><td>[Hz]</td></tr> <tr><td>F</td><td>Spannkraft</td><td>[N]</td></tr> <tr><td>μ</td><td>Masse pro Fläche</td><td>$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$</td></tr> <tr><td>$\xi$</td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr><td>x, y</td><td>Richtung x,y</td><td>[...]</td></tr> <tr><td>a</td><td>Länge</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>b</td><td>Breite</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>m, n</td><td>Anz. Oberwellen</td><td>[1]</td></tr> </table>	f_{mn}	Eigenfrequenz	[Hz]	F	Spannkraft	[N]	μ	Masse pro Fläche	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$	ξ	Störung	[...]	x, y	Richtung x,y	[...]	a	Länge	[m]	b	Breite	[m]	m, n	Anz. Oberwellen	[1]
f_{mn}	Eigenfrequenz	[Hz]																								
F	Spannkraft	[N]																								
μ	Masse pro Fläche	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$																								
ξ	Störung	[...]																								
x, y	Richtung x,y	[...]																								
a	Länge	[m]																								
b	Breite	[m]																								
m, n	Anz. Oberwellen	[1]																								

8.11 Beugung

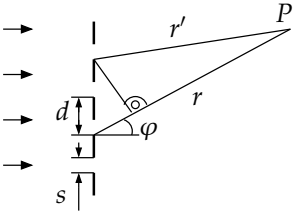
8.11.1 Beugung am Spalt

	$\xi = \frac{A}{r} A_s \cos(\omega t - kr_s)$ $A_s = \frac{\sin\left(\frac{ks \sin(\varphi)}{2}\right)}{\frac{ks \sin(\varphi)}{2}}$ $I_s \sim \xi^2$ Nullstelle n-ter Ordnung: $\sin(\varphi_n) = n \frac{\lambda}{s}$	<table> <tr><td>A</td><td>Amplitude</td><td>[...]</td></tr> <tr><td>A_s</td><td>Formfaktor</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>s</td><td>Spaltbreite</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>r</td><td>Abstand</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr><td>ξ</td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr><td>k</td><td>Wellenzahl</td><td>$\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$</td></tr> <tr><td>$\varphi$</td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td>I_s</td><td>Intensität</td><td>$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$</td></tr> <tr><td>$\lambda$</td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>n</td><td>Ordnung</td><td>[1]</td></tr> </table>	A	Amplitude	[...]	A_s	Formfaktor	[1]	s	Spaltbreite	[m]	r	Abstand	[m]	t	Zeit	[s]	ξ	Störung	[...]	k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$	φ	Betrachtungswinkel	[rad]	I_s	Intensität	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	λ	Wellenlänge	[m]	n	Ordnung	[1]
A	Amplitude	[...]																																	
A_s	Formfaktor	[1]																																	
s	Spaltbreite	[m]																																	
r	Abstand	[m]																																	
t	Zeit	[s]																																	
ξ	Störung	[...]																																	
k	Wellenzahl	$\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$																																	
φ	Betrachtungswinkel	[rad]																																	
I_s	Intensität	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$																																	
λ	Wellenlänge	[m]																																	
n	Ordnung	[1]																																	

8.11.2 Beugung an Kreisförmiger Öffnung

	$\sin(\varphi_1) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ $a = 1.22 f \frac{\lambda}{D}$	<table> <tr><td>D</td><td>Öffnungsdurchmesser</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>φ</td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>a</td><td>Radius erster dunkler Ring</td><td>[m]</td></tr> </table>	D	Öffnungsdurchmesser	[m]	φ	Betrachtungswinkel	[rad]	λ	Wellenlänge	[m]	a	Radius erster dunkler Ring	[m]
D	Öffnungsdurchmesser	[m]												
φ	Betrachtungswinkel	[rad]												
λ	Wellenlänge	[m]												
a	Radius erster dunkler Ring	[m]												

8.11.3 Beugung am Gitter

	$I_g \sim \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$ $B = \frac{\sin\left(\frac{kd \sin(\varphi)}{2} Z\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin(\varphi)}{2}\right)}$ Hauptmaximum n-ter Ordnung: $\sin(\varphi_n) = n \frac{\lambda}{d}$ $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nZ$	<table> <tr> <td>A</td><td>Amplitude</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>A_s</td><td>Formfaktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Spaltbreite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Abstand</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>ξ</td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Gitterkonst.</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td>I_s</td><td>Intensität</td><td>$\left[\frac{W}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\lambda$</td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>Z</td><td>Zahl Gitteröffnungen</td><td>[1]</td></tr> </table>	A	Amplitude	[...]	A_s	Formfaktor	[1]	s	Spaltbreite	[m]	r	Abstand	[m]	t	Zeit	[s]	ξ	Störung	[...]	d	Gitterkonst.	[m]	φ	Betrachtungswinkel	[rad]	I_s	Intensität	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$	λ	Wellenlänge	[m]	Z	Zahl Gitteröffnungen	[1]
A	Amplitude	[...]																																	
A_s	Formfaktor	[1]																																	
s	Spaltbreite	[m]																																	
r	Abstand	[m]																																	
t	Zeit	[s]																																	
ξ	Störung	[...]																																	
d	Gitterkonst.	[m]																																	
φ	Betrachtungswinkel	[rad]																																	
I_s	Intensität	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$																																	
λ	Wellenlänge	[m]																																	
Z	Zahl Gitteröffnungen	[1]																																	

Teil II

Elektrizitätslehre

9 Grundlagen

9.1 Grundgrößen

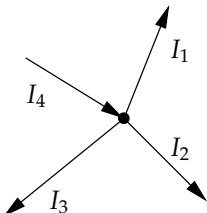
Ladung Q	$\Delta Q = I(t) \cdot \Delta t = \int I(t)$ $\Delta Q = \frac{\Delta W(t)}{\Delta U(t)}$	Q Ladung $[C], [As]$ I Strom $[A]$ J Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ v DriftGeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
Strom I	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ $I = \frac{U}{R} = \frac{P}{U}$	U Spannung $[V]$ W Arbeit $[Ws], [J]$ P Leistung $[W]$ R Widerstand $[\Omega]$ ρ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
Driftgeschwindigkeit v	$v = \frac{I}{neA}$	G Leitwert $[S]$ κ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ t Zeit $[t]$
Spannung U	$U = RI$ $U(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta Q}$ $U = \frac{P}{I} = \sqrt{PR}$ $\Delta U = E\Delta x$	A Fläche $[m^2]$ F Kraft $[N]$ m Masse $[kg]$ g Erdberschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$ l Länge $[m]$ α Temp. Koeff. $[\frac{1}{^\circ C}]$ ϑ Temperatur $[^\circ C]$ n Elektronendichte $[\frac{1}{m^3}]$
Energie W	$W = Fh = mgh$ $\Delta W(t) = U(t)I(t)\Delta t$	e Elementarladung $[C]$ $1.602 \cdot 10^{19} C$

Leistung P	$P(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}$ $P(t) = U(t)I(t)$ $P(t) = I^2(t)R = \frac{U^2(t)}{R}$	Q Ladung $[C], [As]$ I Strom $[A]$ J Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ v Driftgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ U Spannung $[V]$ W Arbeit $[Ws], [J]$ P Leistung $[W]$ R Widerstand $[\Omega]$ ρ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ G Leitwert $[S]$ κ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ t Zeit $[t]$ A Fläche $[m^2]$ F Kraft $[N]$ m Masse $[kg]$ g Erdbeschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$ l Länge $[m]$ α Temp. Koeff. $[\frac{1}{^\circ C}]$ ϑ Temperatur $[^\circ C]$ n Elektronendichte $[\frac{1}{m^3}]$ e Elementarladung $[C]$ $1.602 \cdot 10^{19} C$
Widerstand R	$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P} = \frac{P}{I^2}$ $R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A}$	
Spez. Widerstand ρ	$\rho = \frac{1}{\kappa A}$ $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha_{20})\Delta\vartheta$	
Leitwert G	$G = \frac{\kappa A}{l} = \frac{1}{R}$	
Spez. Leitwert κ	$\kappa = \frac{1}{\rho}$	
Stromdichte J	$J(t) = \frac{I(t)}{A} = \frac{\Delta I(x, y)}{\Delta A}$ $\vec{J} = \kappa \vec{E}$	
Feldstärke E	$E(x) = \frac{\Delta U}{\Delta x}$ $E = \frac{F}{Q}$ $\vec{E} = \rho \vec{J}$	

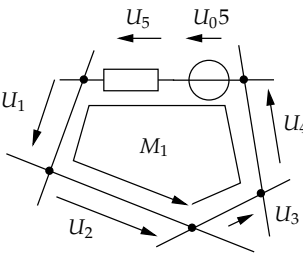
9.2 Netzwerke bei Gleichstrom

9.2.1 Kirchhoffsche Gesetzte

Stromgesetz

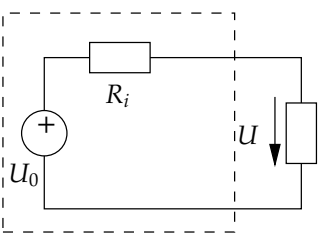
	Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller Abfließenden Ströme $\sum_{k=1}^N I_k = 0$	I Strom [A]
---	--	---------------------------------------

Spannungsgesetz

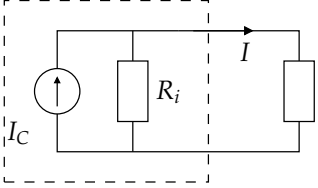
	Die Summe aller Spannungen im Kreis ist null. $\sum_{k=1}^N U_k = 0$	U Spannung [V]
--	---	--

9.3 Reale Quellen

9.3.1 Reale Spannungsquelle

	$U = U_0 - R_i I$ $R_i = \frac{U_0}{I_C}$	U Spannung [V] I Strom [A] R Widerstand [Ω]
---	---	---

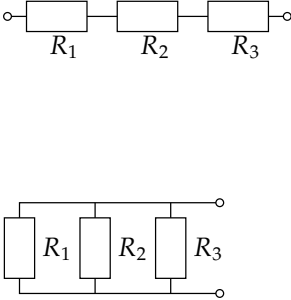
9.3.2 Reale Stromquelle

	$I = I_C - G_i U$ $G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_C}{U_0}$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[I]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	I	Strom	$[I]$	R	Widerstand	$[\Omega]$
U	Spannung	$[V]$									
I	Strom	$[I]$									
R	Widerstand	$[\Omega]$									

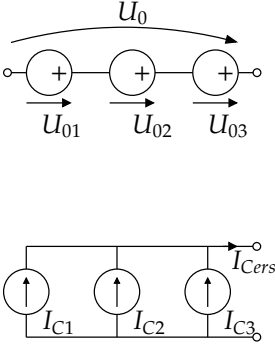
9.4 Netzwerkanalyse

9.4.1 Netzwerkumwandlung

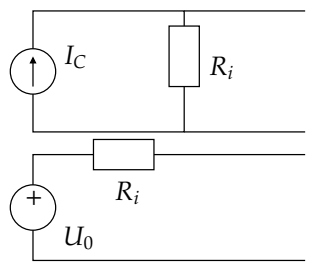
Widerstandsschaltungen

	Serieschaltung: $R_{\text{ers}} = \sum_{k=1}^n R_k$ Parallelschaltung: $R_{\text{ers}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[I]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	I	Strom	$[I]$	R	Widerstand	$[\Omega]$
U	Spannung	$[V]$									
I	Strom	$[I]$									
R	Widerstand	$[\Omega]$									

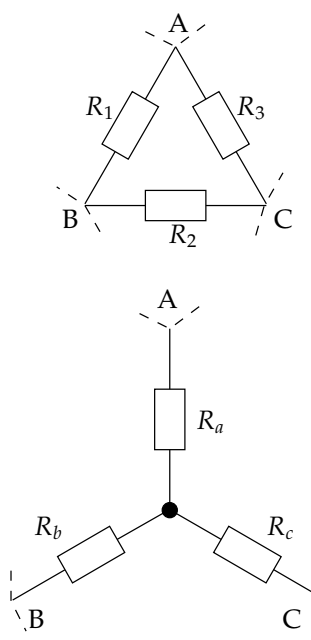
Mehrere Quellen

	Serieschaltung von Spannungsquellen: $U_{0\text{ers}} = \sum_{k=1}^n U_{0k}$ Parallelschaltung von Stromquellen: $I_{\text{Cers}} = \sum_{k=1}^n I_{Ck}$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[I]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	I	Strom	$[I]$
U	Spannung	$[V]$						
I	Strom	$[I]$						

Quellenumwandlung

	U-Quelle $\rightarrow$ I-Quelle: $R_i = R_i \quad I_C = \frac{U_0}{R_i}$ I-Quelle $\rightarrow$ U-Quelle: $R_i = R_i \quad U_0 = I_C R_i$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[I]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	I	Strom	$[I]$	R	Widerstand	$[\Omega]$
U	Spannung	$[V]$									
I	Strom	$[I]$									
R	Widerstand	$[\Omega]$									

Stern – Dreieck Umwandlung

	Dreieck $\rightarrow$ Stern: $R_a = \frac{R_1 R_2}{R_0}$ $R_b = \frac{R_2 R_3}{R_0}$ $R_c = \frac{R_1 R_3}{R_0}$ $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ Stern $\rightarrow$ Dreieck: $R_1 = R_a R_b G_0 \quad G_1 = \frac{G_a G_b}{G_0}$ $R_2 = R_b R_c G_0 \quad G_1 = \frac{G_b G_c}{G_0}$ $R_3 = R_a R_c G_0 \quad G_1 = \frac{G_a G_c}{G_0}$ $G_0 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[I]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Leitwert</td><td>$[S]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	I	Strom	$[I]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	G	Leitwert	$[S]$
U	Spannung	$[V]$												
I	Strom	$[I]$												
R	Widerstand	$[\Omega]$												
G	Leitwert	$[S]$												

Überlagerungsprinzip (Superposition)

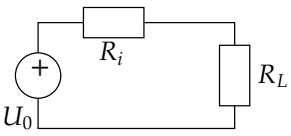
Die Wirkungen der entsprechenden Ursachen werden einzeln betrachtet. In einer Schaltung mit mehreren Quellen wird jede Quelle einzeln betrachtet. Die übrigen Spannungsquellen werden durch einen Kurzschluss und die restlichen Stromquellen durch einen Unterbruch ersetzt. Die Summen der einzelnen Teilwirkungen ergibt die gesamte Wirkung.

(Voraussetzung: lineares System)

Nichtlinearer Verbraucher an linearer Schaltung (Thévenin)

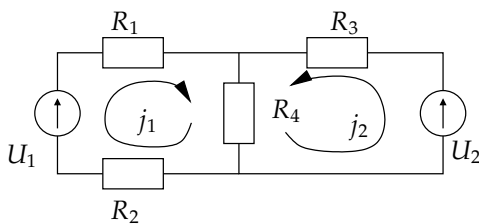
Die gesamte Schaltung muss in eine Ersatzquelle umgeformt werden. Das Ersatzschema gilt für U und I . (Achtung: z.B. $P_{\text{Quellen}} \neq U_0 I$)

9.4.2 Wirkungsgrad und Leistungsanpassung

	$\eta = \frac{P_L}{P_0} = \frac{R_L}{\underbrace{R_L + R_i}_{(*)}}$ (*) gilt nicht für Ersatzschaltungen	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>P</td><td>Leistung</td><td>$[W]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	U	Spannung	$[V]$	P	Leistung	$[W]$	R	Widerstand	$[\Omega]$
U	Spannung	$[V]$									
P	Leistung	$[W]$									
R	Widerstand	$[\Omega]$									

9.4.3 Systematische Analyse linearer Netzwerke

Kreisströme als Variablen (Kreistrom-Methode)



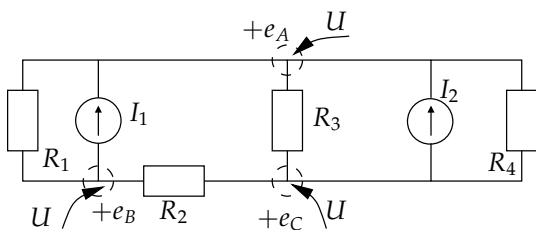
α = Anzahl Knoten
 β = Anzahl Zweige

$\beta - \alpha + 1$ unabhängige Gleichungen

$$\begin{aligned} j_1(R_1 + R_2 + R_4) + j_2 R_4 &= U_1 \\ j_1 R_4 + j_2(R_3 + R_4) &= U_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & R_4 \\ R_4 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Trennspannungen als Variable (Knotenspannungsmethode)



α = Anzahl Knoten

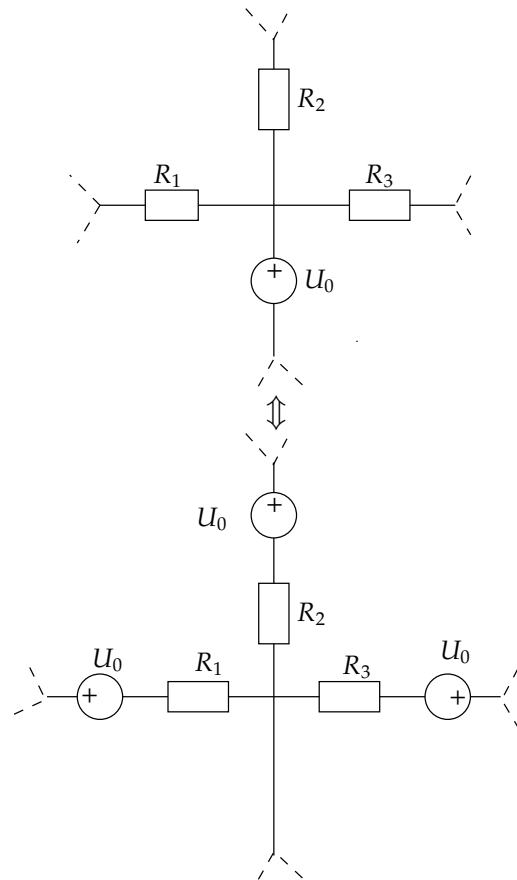
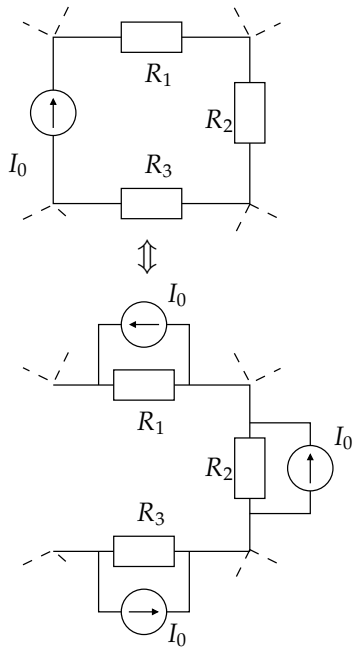
$\alpha - 1$ unabhängige Gleichungen

$$\begin{aligned} e_A(G_1 + G_3 + G_4) - e_B G_1 &= -I_1 - I_2 \\ e_A G_1 + e_B(G_1 + G_2) &= I_1 \end{aligned}$$

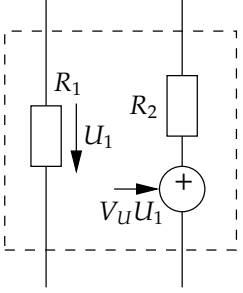
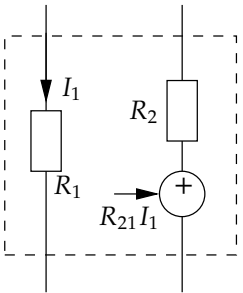
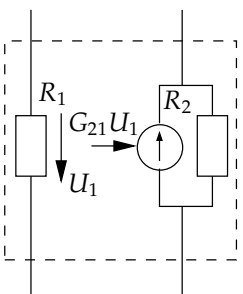
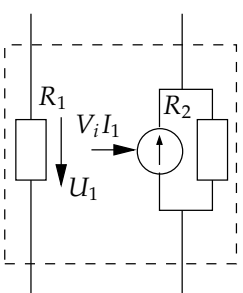
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_1 \\ G_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

9.4.4 Quellenverschiebung

Es werden gleiche Quellen so in die Schaltung eingefügt, dass die Wirkung der ursprünglichen Quelle aufgehoben wird.

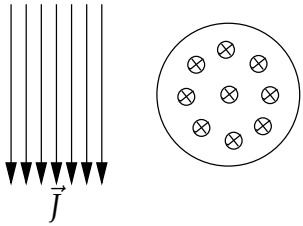


9.4.5 Netzwerke mit gesteuerten Quellen

	Spannungsgesteuerte Spannungsquelle $U_{02} = V_U U_1$	I Strom [A] U Spannung [V] R Widerstand [Ω] G Leitwert [S] V Verstärkung [1]
	Stromgesteuerte Spannungsquelle $U_{02} = R_{12} U_1$	
	Spannungsgesteuerte Stromquelle $I_{C2} = G_{12} U_1$	
	Stromgesteuerte Stromquelle $I_{C2} = V_i I_1$	

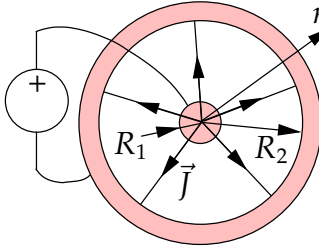
10 Das elektrische Strömungsfeld

10.1 Allgemein

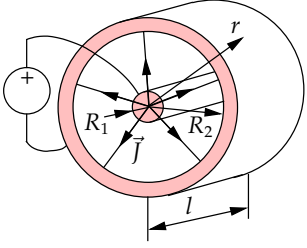
	$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}$ $I = \int \vec{J} d\vec{A} = \vec{J} \vec{A}$	<table> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>J</td><td>Stromdichte</td><td>$[\frac{A}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	I	Strom	$[A]$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	A	Fläche	$[m^2]$
I	Strom	$[A]$									
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$									
A	Fläche	$[m^2]$									

10.2 Spezielle Felder

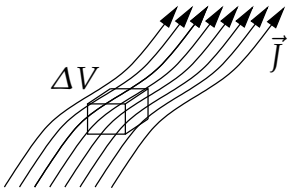
10.2.1 Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$ $I = J(r) 4\pi r^2 - I = 0$ $J(r) = \kappa E(r) \quad E(r) = \rho E(r)$ $E(r) = \frac{I}{4\pi \kappa r^2}$ $U_{12} = \frac{I}{4\pi \kappa} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ $V(r) = \int_r^{R_2} \vec{E}(x) d\vec{x} = \frac{I}{4\pi \kappa} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ $G = 4\pi \kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	<table> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>J</td><td>Stromdichte</td><td>$[\frac{A}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>ρ</td><td>Spez. Widerstand</td><td>$[\frac{\Omega m m^2}{m}]$</td></tr> <tr> <td>κ</td><td>spez. Leitwert</td><td>$[\frac{S}{m}]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Leitwert</td><td>$[S]$</td></tr> <tr> <td>R, r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	I	Strom	$[A]$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega m m^2}{m}]$	κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	G	Leitwert	$[S]$	R, r	Radius	$[m]$	V	Potential	$[V]$	A	Fläche	$[m^2]$
I	Strom	$[A]$																														
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																														
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																														
U	Spannung	$[V]$																														
ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega m m^2}{m}]$																														
κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																														
G	Leitwert	$[S]$																														
R, r	Radius	$[m]$																														
V	Potential	$[V]$																														
A	Fläche	$[m^2]$																														

10.2.2 Zylindrisches Zentralfeld

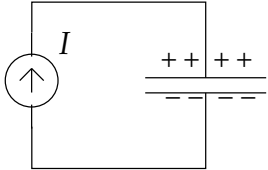
	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$ $J(r) = \frac{I}{2\pi r l}$ $J(r) = \kappa E(r) \quad E(r) = \rho E(r)$ $E(r) = \frac{I}{2\pi \kappa r l}$ $U_{12} = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $U = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $V(r) = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{R_2}{r}$ $G = \frac{2\pi \kappa l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$	<table> <tr><td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr><td>J</td><td>Stromdichte</td><td>$[\frac{A}{m^2}]$</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>Spez. Widerstand</td><td>$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$</td></tr> <tr><td>κ</td><td>spez. Leitwert</td><td>$[\frac{S}{m}]$</td></tr> <tr><td>G</td><td>Leitwert</td><td>$[S]$</td></tr> <tr><td>R, r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	I	Strom	$[A]$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	V	Potential	$[V]$	ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$	κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	G	Leitwert	$[S]$	R, r	Radius	$[m]$	A	Fläche	$[m^2]$
I	Strom	$[A]$																														
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																														
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																														
U	Spannung	$[V]$																														
V	Potential	$[V]$																														
ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$																														
κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																														
G	Leitwert	$[S]$																														
R, r	Radius	$[m]$																														
A	Fläche	$[m^2]$																														

10.2.3 Leistung und räumliche Leistungsdichte

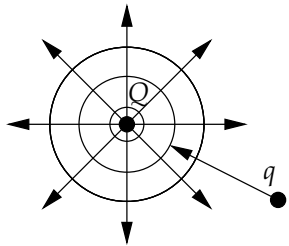
	$p(x, y, z) = \frac{\Delta P}{\Delta I}$ $p(x, y, z) = E(x, y, z) J(x, y, z)$ $= \kappa(x, y, z) E^2(x, y, z)$ $= \rho(x, y, z) J^2(x, y, z)$ Gesamtleistung P aus p: $P = \sum \Delta p = \sum_n P_n \Delta V$	<table> <tr><td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr><td>J</td><td>Stromdichte</td><td>$[\frac{A}{m^2}]$</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>Spez. Widerstand</td><td>$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$</td></tr> <tr><td>κ</td><td>spez. Leitwert</td><td>$[\frac{S}{m}]$</td></tr> <tr><td>G</td><td>Leitwert</td><td>$[S]$</td></tr> <tr><td>R, r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	I	Strom	$[A]$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$	κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	G	Leitwert	$[S]$	R, r	Radius	$[m]$	A	Fläche	$[m^2]$
I	Strom	$[A]$																											
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																											
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																											
U	Spannung	$[V]$																											
ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$																											
κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																											
G	Leitwert	$[S]$																											
R, r	Radius	$[m]$																											
A	Fläche	$[m^2]$																											

11 Elektrostatik

11.1 Das Coulombsche Gesetz

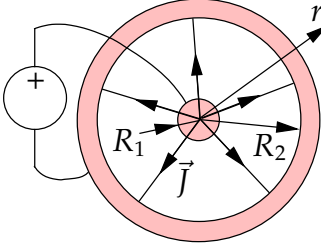
	$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2}$ $F > 0 \rightarrow \text{Abstossung}$ $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Nm}}$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[\text{N}]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[\text{C}]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[\text{m}]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$</td></tr> <tr> <td>$\epsilon_r$</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[\text{N}]$	Q	Ladung	$[\text{C}]$	r	Radius	$[\text{m}]$	ϵ	Dielektrizität	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$
F	Kraft	$[\text{N}]$																		
Q	Ladung	$[\text{C}]$																		
r	Radius	$[\text{m}]$																		
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$																		
ϵ_r	rel. Dielektrizität																			
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$																		

11.2 Das elektrostatische Feld (Allgemein)

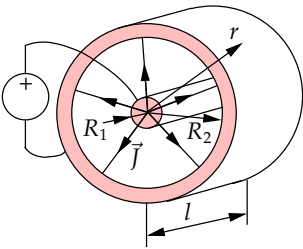
 Bei mehreren Ladungen gilt das Superpositionsprinzip	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$ $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\psi_{el} = \int_A \vec{D} d\vec{A}$ $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ $Q = CU$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[\text{N}]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[\text{C}]$</td></tr> <tr> <td>q</td><td>Probeladung</td><td>$[\text{C}]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[\text{m}]$</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[\text{F}]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{\text{V}}{\text{m}}]$</td></tr> <tr> <td>$U$</td><td>Spannung</td><td>$[\text{V}]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Potential</td><td>$[\text{V}]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$[\frac{\text{Cmm}^2}{\text{m}}]$</td></tr> <tr> <td>$A$</td><td>Fläche</td><td>$[\text{m}^2]$</td></tr> <tr> <td>$\psi_{el}$</td><td>el. Fluss</td><td>$[\text{C}]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$</td></tr> <tr> <td>$\epsilon_r$</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[\text{N}]$	Q	Ladung	$[\text{C}]$	q	Probeladung	$[\text{C}]$	r	Radius	$[\text{m}]$	C	Kapazität	$[\text{F}]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{\text{V}}{\text{m}}]$	U	Spannung	$[\text{V}]$	V	Potential	$[\text{V}]$	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{\text{Cmm}^2}{\text{m}}]$	A	Fläche	$[\text{m}^2]$	ψ_{el}	el. Fluss	$[\text{C}]$	ϵ	Dielektrizität	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$
F	Kraft	$[\text{N}]$																																										
Q	Ladung	$[\text{C}]$																																										
q	Probeladung	$[\text{C}]$																																										
r	Radius	$[\text{m}]$																																										
C	Kapazität	$[\text{F}]$																																										
E	el. Feldstärke	$[\frac{\text{V}}{\text{m}}]$																																										
U	Spannung	$[\text{V}]$																																										
V	Potential	$[\text{V}]$																																										
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{\text{Cmm}^2}{\text{m}}]$																																										
A	Fläche	$[\text{m}^2]$																																										
ψ_{el}	el. Fluss	$[\text{C}]$																																										
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$																																										
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																											
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{\text{C}}{\text{Nm}}]$																																										

11.3 Spezielle Felder

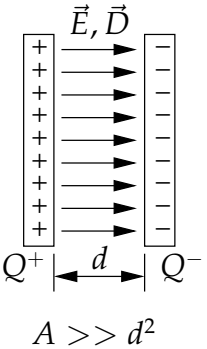
11.3.1 Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

	$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \text{const}$ für $R_1 < r < R_2$ gilt: $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{1}{\epsilon} D(r)$ $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{QR^2}{4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{r^2}$ $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ Hülle bei r: $\psi_{el} = D(r) 4\pi r^2 = Q$ Kugelkondensator: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	<table> <tr> <td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>R, r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[F]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$\left[\frac{V}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$\left[\frac{C}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$A$</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>$\psi_{el}$</td><td>el. Fluss</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\epsilon_r$</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	$[C]$	R, r	Radius	$[m]$	C	Kapazität	$[F]$	E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$	U	Spannung	$[V]$	V	Potential	$[V]$	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$	A	Fläche	$[m^2]$	ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$	ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$
Q	Ladung	$[C]$																																				
R, r	Radius	$[m]$																																				
C	Kapazität	$[F]$																																				
E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$																																				
U	Spannung	$[V]$																																				
V	Potential	$[V]$																																				
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$																																				
A	Fläche	$[m^2]$																																				
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$																																				
ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																					
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				

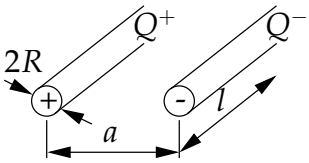
11.3.2 Zylindrisches Zentralfeld

	$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 l} = \text{const}$ für $R_1 < r < R_2$ gilt: $E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} = \frac{1}{\epsilon} D(r)$ $D(r) = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{\sigma R}{r}$ $V(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{r}$ Hülle bei r: $\psi_{el} = D(r) 2\pi r l = Q$ Kondensator: $U = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_1}{R_2}$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$	<table> <tr><td>Q</td><td>Ladung</td><td>[C]</td></tr> <tr><td>R, r</td><td>Radius</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$\left[\frac{V}{m}\right]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>V</td><td>Potential</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$</td></tr> <tr><td>$A$</td><td>Fläche</td><td>[m²]</td></tr> <tr><td>ψ_{el}</td><td>el. Fluss</td><td>[C]</td></tr> <tr><td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> <tr><td>$\epsilon_r$</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	[C]	R, r	Radius	[m]	C	Kapazität	[F]	E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$	U	Spannung	[V]	V	Potential	[V]	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$	A	Fläche	[m ²]	ψ_{el}	el. Fluss	[C]	ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$
Q	Ladung	[C]																																				
R, r	Radius	[m]																																				
C	Kapazität	[F]																																				
E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$																																				
U	Spannung	[V]																																				
V	Potential	[V]																																				
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$																																				
A	Fläche	[m ²]																																				
ψ_{el}	el. Fluss	[C]																																				
ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																					
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				

11.3.3 Homogenes Feld (Plattenkondensator)

	$\sigma = D = \frac{Q}{A}$ $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A\epsilon}$ Kondensator: $U = \frac{\sigma}{\epsilon} d = \frac{Q}{A\epsilon} d$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon A}{d}$	<table> <tr><td>Q</td><td>Ladung</td><td>[C]</td></tr> <tr><td>d</td><td>Abstand</td><td>[m]</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$\left[\frac{V}{m}\right]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>V</td><td>Potential</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$</td></tr> <tr><td>$A$</td><td>Fläche</td><td>[m²]</td></tr> <tr><td>ψ_{el}</td><td>el. Fluss</td><td>[C]</td></tr> <tr><td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> <tr><td>$\epsilon_r$</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$\left[\frac{C}{Nm}\right]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	[C]	d	Abstand	[m]	C	Kapazität	[F]	E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$	U	Spannung	[V]	V	Potential	[V]	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$	A	Fläche	[m ²]	ψ_{el}	el. Fluss	[C]	ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$
Q	Ladung	[C]																																				
d	Abstand	[m]																																				
C	Kapazität	[F]																																				
E	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$																																				
U	Spannung	[V]																																				
V	Potential	[V]																																				
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$																																				
A	Fläche	[m ²]																																				
ψ_{el}	el. Fluss	[C]																																				
ϵ	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																					
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				

11.3.4 Paralleldrahtleitung

	Es gilt das Superpositionsprinzip: $E_{tot} = E_{Leiter_1} + E_{Leiter_2}$ Kondensator: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{a-R}{R}}$ $C' = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{a-R}{R}}$	<table> <tr> <td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Abstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[F]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$[\frac{C}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>ψ_{el}</td><td>el. Fluss</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> <tr> <td>ϵ_r</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	$[C]$	d	Abstand	$[m]$	C	Kapazität	$[F]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	V	Potential	$[V]$	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	A	Fläche	$[m^2]$	ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$	ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
Q	Ladung	$[C]$																																				
d	Abstand	$[m]$																																				
C	Kapazität	$[F]$																																				
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																				
U	Spannung	$[V]$																																				
V	Potential	$[V]$																																				
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																				
A	Fläche	$[m^2]$																																				
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$																																				
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																				
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																					
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																				

11.4 Energie im elektrischen Feld

	$W = \frac{CU^2}{2}$ $w = \frac{W}{V}$ Allgemein: $w(x, y, z) = \frac{dW(x, y, z)}{dV}$	<table> <tr> <td>W</td><td>Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>w</td><td>Energiedichte</td><td>$[J/m^3]$</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[F]$</td></tr> <tr> <td>V</td><td>Volumen</td><td>$[m^3]$</td></tr> </table>	W	Energie	$[J]$	w	Energiedichte	$[J/m^3]$	U	Spannung	$[V]$	C	Kapazität	$[F]$	V	Volumen	$[m^3]$
W	Energie	$[J]$															
w	Energiedichte	$[J/m^3]$															
U	Spannung	$[V]$															
C	Kapazität	$[F]$															
V	Volumen	$[m^3]$															

11.5 Kräfte im elektrischen Feld

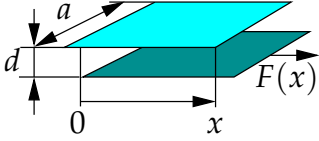
11.5.1 Allgemein

$$\Delta W = F \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{dW(x)}{dx}$$

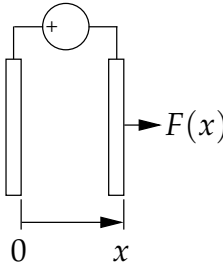
Prinzip der virtuellen Verschiebung

Man denkt sich den Leiter, auf den die Kraft berechnet werden soll, um Δx in diejenige Richtung verschoben, in welche die Kraft berechnet werden soll: $\rightarrow$ Energiedifferenz ΔW

11.5.2 Verschiebung

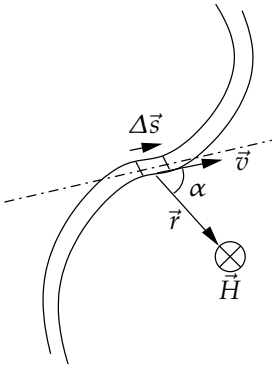
	Mit eingeschalteter Quelle: $W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon axU^2}{2d}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon aU^2}{2d}$ Mit ausgeschalteter Quelle: $W(x) = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon ax_0^2 U^2}{2xd}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon ax_0^2 U^2}{2x^2 d}$	<table> <tr><td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[C]$</td></tr> <tr><td>d</td><td>Abstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>x</td><td>Überlappung</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[F]$</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$[\frac{C}{m^2}]$</td></tr> <tr><td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr><td>ψ_{el}</td><td>el. Fluss</td><td>$[C]$</td></tr> <tr><td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> <tr><td>ϵ_r</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	$[C]$	d	Abstand	$[m]$	x	Überlappung	$[m]$	C	Kapazität	$[F]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	V	Potential	$[V]$	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	A	Fläche	$[m^2]$	ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$	ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
Q	Ladung	$[C]$																																							
d	Abstand	$[m]$																																							
x	Überlappung	$[m]$																																							
C	Kapazität	$[F]$																																							
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																							
U	Spannung	$[V]$																																							
V	Potential	$[V]$																																							
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																							
A	Fläche	$[m^2]$																																							
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$																																							
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																							
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																								
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																							

11.5.3 Anziehung

	$W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2x}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon AU^2}{2x^2}$	<table> <tr><td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[C]$</td></tr> <tr><td>x</td><td>Abstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>$[F]$</td></tr> <tr><td>E</td><td>el. Feldstärke</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>V</td><td>Potential</td><td>$[V]$</td></tr> <tr><td>σ</td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td>$[\frac{C}{m^2}]$</td></tr> <tr><td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr><td>ψ_{el}</td><td>el. Fluss</td><td>$[C]$</td></tr> <tr><td>ϵ</td><td>Dielektrizität</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> <tr><td>ϵ_r</td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td>ϵ_0</td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td>$[\frac{C}{Nm}]$</td></tr> </table>	Q	Ladung	$[C]$	x	Abstand	$[m]$	C	Kapazität	$[F]$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	U	Spannung	$[V]$	V	Potential	$[V]$	σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	A	Fläche	$[m^2]$	ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$	ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	ϵ_r	rel. Dielektrizität		ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
Q	Ladung	$[C]$																																				
x	Abstand	$[m]$																																				
C	Kapazität	$[F]$																																				
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																				
U	Spannung	$[V]$																																				
V	Potential	$[V]$																																				
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																				
A	Fläche	$[m^2]$																																				
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$																																				
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																				
ϵ_r	rel. Dielektrizität																																					
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																				

12 Magnetismus

12.1 Feldstärke

 siehe spezielle Anordnungen ab S. 97.	Biot-Savart $\vec{H} = \frac{Q}{4\pi r^3} (\vec{v} \times \vec{r})$ $H = \frac{Qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$ Leiterbezogen $d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} (d\vec{s} \times \vec{r})$ $dH = \frac{I ds}{4\pi r^2} \sin \alpha$ $H = \int d\vec{H} = \int \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha ds$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$\left[\frac{A}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>ds</td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>v</td><td>Geschwindigkeit</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	I	Strom	$[A]$	ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	r	Radius	$[m]$	v	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$	α	Winkel	$[rad]$
H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$																		
I	Strom	$[A]$																		
ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																		
r	Radius	$[m]$																		
v	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
α	Winkel	$[rad]$																		

12.2 Permeabilität

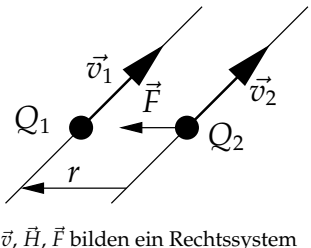
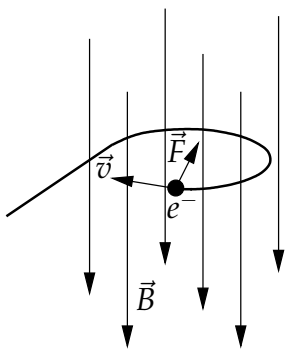
	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$	<table> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$\left[\frac{H}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>μ_r</td><td>Permeabilitätszahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>μ_0</td><td>Permeabilität des Vakuums</td><td>$\left[\frac{H}{m}\right]$</td></tr> </table>	μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$	μ_r	Permeabilitätszahl	$[1]$	μ_0	Permeabilität des Vakuums	$\left[\frac{H}{m}\right]$
μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$									
μ_r	Permeabilitätszahl	$[1]$									
μ_0	Permeabilität des Vakuums	$\left[\frac{H}{m}\right]$									

12.3 Magnetische Flussdichte

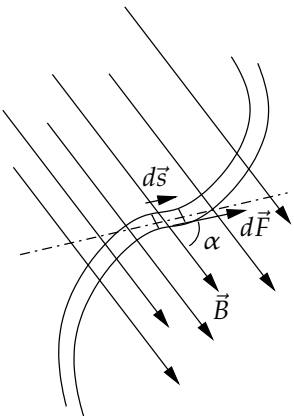
siehe spezielle Anordnungen ab S. 97.	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	H Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ μ Permeabilität $\left[\frac{H}{m}\right]$ B Flussdichte, Induktion $\left[\frac{T}{m^2}\right], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
---------------------------------------	-------------------------	---

12.4 Kräfte im Magnetischen Feld

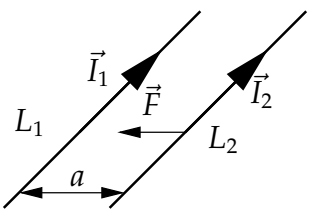
12.4.1 Kräfte auf Ladungen

 $\vec{v}, \vec{H}, \vec{F}$ bilden ein Rechtssystem	Für parallele Bahnen $F_A = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2}$ Allgemein $F = Q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\mu}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times \frac{\vec{r}}{r}}{r^2} \right)$	H Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ F Kraft auf Ladung Q_1 $[N]$ $Q_{1,2}$ Ladung $[C]$ $v_{1,2}$ Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$ r Radius $[m]$ μ Permeabilität $\left[\frac{H}{m}\right]$ B Flussdichte, Induktion $\left[\frac{T}{m^2}\right], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
	$F = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ $F = Q(\vec{v} \times \mu \vec{H})$ $F = Qv\mu H \sin \alpha$	

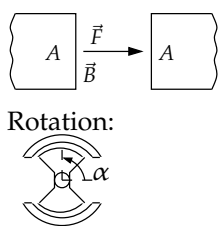
12.4.2 Kraft auf Leiter im B-Feld

	$d\vec{F} = \frac{dQ}{dt}(\vec{ds} \times \vec{B}) = I(d\vec{s} \times \vec{B})$ $dF = IBds \sin \alpha$ für geraden Leiter: $F = IBl \sin \alpha$	<table> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft auf Leiter</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Ladung</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>ds</td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	F	Kraft auf Leiter	$[N]$	Q	Ladung	$[C]$	I	Strom	$[A]$	α	Winkel	$[rad]$	ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	l	Länge	$[m]$
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																					
F	Kraft auf Leiter	$[N]$																					
Q	Ladung	$[C]$																					
I	Strom	$[A]$																					
α	Winkel	$[rad]$																					
ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																					
l	Länge	$[m]$																					

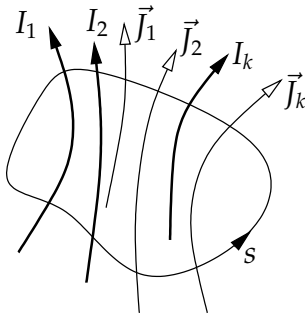
12.4.3 Kräfte auf parallele Leiter

	$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a}$ $\vec{I}_1 \uparrow \downarrow \vec{I}_2 \Rightarrow \text{Abstossung}$ $\vec{I}_1 \uparrow \uparrow \vec{I}_2 \Rightarrow \text{Anziehung}$	<table> <tr> <td>F_A</td><td>Kraft zwischen den Leitern</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>$L_{1,2}$</td><td>Leiter</td><td>$[C]$</td></tr> <tr> <td>$I_{1,2}$</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>a</td><td>Abstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> </table>	F_A	Kraft zwischen den Leitern	$[N]$	$L_{1,2}$	Leiter	$[C]$	$I_{1,2}$	Strom	$[A]$	a	Abstand	$[m]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
F_A	Kraft zwischen den Leitern	$[N]$															
$L_{1,2}$	Leiter	$[C]$															
$I_{1,2}$	Strom	$[A]$															
a	Abstand	$[m]$															
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$															

12.4.4 Kräfte auf Randflächen eines Feldes

Energie W siehe S. 93  Rotation:	$F = \frac{dW(s)}{ds}$ Prinzip der virtuellen Verschiebung: Fläche um ds verschoben (s-Richtung = Kraftrichtung) $F = \frac{1}{2} BHA$ Bei Drehbewegung: $M_{rot} = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha}$	<table> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Weg</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Energie</td><td>$[J]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>M_{rot}</td><td>Drehmoment</td><td>$[Nm]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> </table>	F	Kraft	$[N]$	s	Weg	$[m]$	W	Energie	$[J]$	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	A	Fläche	$[m^2]$	M_{rot}	Drehmoment	$[Nm]$	α	Winkel	$[rad]$
F	Kraft	$[N]$																								
s	Weg	$[m]$																								
W	Energie	$[J]$																								
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																								
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																								
A	Fläche	$[m^2]$																								
M_{rot}	Drehmoment	$[Nm]$																								
α	Winkel	$[rad]$																								

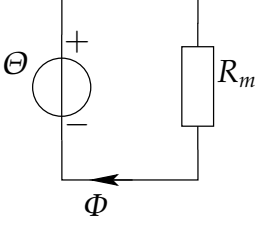
12.5 Durchflutung

	$\Theta = \oint_s \vec{H} ds = I$ $\Theta = \sum_{k=1}^n I_k + \iint_{A_s} \vec{j} d\vec{A}$	<table><tr><td>Θ</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr><tr><td>J</td><td>Stromdichte</td><td>$\left[\frac{A}{m^2}\right]$</td></tr><tr><td>$I$</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr><tr><td>$s$</td><td>Geschlossene Kurve</td><td>$[m]$</td></tr><tr><td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$\left[\frac{A}{m}\right]$</td></tr><tr><td>U_{mg}</td><td>Magnetische Spannung</td><td>$[A]$</td></tr><tr><td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr></table>	Θ	Durchflutung	$[A]$	J	Stromdichte	$\left[\frac{A}{m^2}\right]$	I	Strom	$[A]$	s	Geschlossene Kurve	$[m]$	H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	U_{mg}	Magnetische Spannung	$[A]$	l	Länge	$[m]$
Θ	Durchflutung	$[A]$																					
J	Stromdichte	$\left[\frac{A}{m^2}\right]$																					
I	Strom	$[A]$																					
s	Geschlossene Kurve	$[m]$																					
H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$																					
U_{mg}	Magnetische Spannung	$[A]$																					
l	Länge	$[m]$																					
Nicht geschlossener Weg $A \rightarrow B$	$U_{mgAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$ z.B Luftspalt: $U_{mgAB} = Hl$																						
Feld um Leiter	$\Theta = \oint_s \vec{H} ds = I$																						
Spule	$\Theta = NI$																						

12.6 Magnetischer Fluss

siehe spezielle Anordnungen ab S. 97.	$\Phi = \iint_A \vec{B} dA$ $\Phi = \Lambda \Theta = \frac{\Theta}{R_m}$ Homogenes Feld: $\Phi = BA$	<table> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\Theta$</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$</td></tr> </table>	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	A	Fläche	$[m^2]$	B	Flussdichte, Induktion	$[T], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$	Θ	Durchflutung	$[A]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$															
A	Fläche	$[m^2]$															
B	Flussdichte, Induktion	$[T], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$															
Θ	Durchflutung	$[A]$															
Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$															

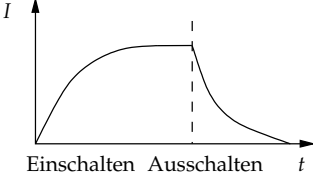
12.7 Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

	$R_m = \frac{\Theta}{\Phi}$ $\Lambda = \frac{1}{R_m}$ für homogenes Feld: $R_{m_n} = \frac{l_n}{\mu_n A_n}$	<table> <tr> <td>R_m</td><td>Magnetischer Widerstand</td><td>$[\frac{A}{Vs}]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>Θ</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$</td></tr> <tr> <td>$l$</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>$A$</td><td>Querschnitt</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> </table>	R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	Θ	Durchflutung	$[A]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	l	Länge	$[m]$	A	Querschnitt	$[m^2]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																					
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					
Θ	Durchflutung	$[A]$																					
Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																					
l	Länge	$[m]$																					
A	Querschnitt	$[m^2]$																					
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																					

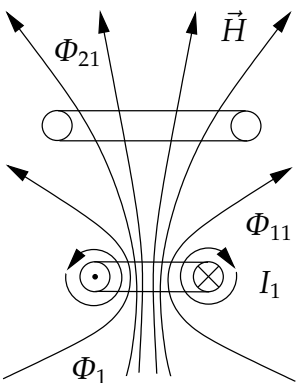
12.8 Spulenfluss

Flüsse durch alle Einzelwindungsflächen aufsummiert (verketteter Fluss)	$\Psi = N\Phi = \Lambda N^2 I$ $\Psi = LI$	<table> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>$[Vs]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss Einzelw.</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[\frac{Vs}{A}]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Windungszahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$</td></tr> </table>	Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$	Φ	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$	L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	N	Windungszahl	$[1]$	I	Strom	$[A]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$
Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$																		
Φ	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$																		
L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																		
N	Windungszahl	$[1]$																		
I	Strom	$[A]$																		
Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																		

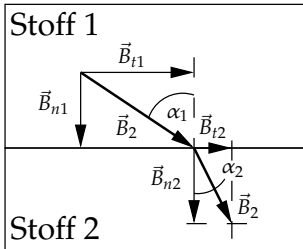
12.9 Induktivität

	$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$ $L = N^2 \Lambda = \frac{N^2}{R_m}$ $L = \frac{2W}{I^2}$	<table> <tr> <td>W</td><td>Energie des Feldes</td><td>$[Ws], [J]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[H]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss Einzelw.</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Windungszahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$</td></tr> <tr> <td>$R_m$</td><td>Magnetischer Widerstand</td><td>$[\frac{A}{Vs}]$</td></tr> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>$[Wb]$</td></tr> </table>	W	Energie des Feldes	$[Ws], [J]$	L	Induktivität	$[H]$	Φ	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$	N	Windungszahl	$[1]$	I	Strom	$[A]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	Ψ	Spulenfluss	$[Wb]$
W	Energie des Feldes	$[Ws], [J]$																								
L	Induktivität	$[H]$																								
Φ	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$																								
N	Windungszahl	$[1]$																								
I	Strom	$[A]$																								
Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																								
R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																								
Ψ	Spulenfluss	$[Wb]$																								

12.10 Gegeninduktivität und induktive Kopplung

 1. Index: Wirkungsort 2. Index: Ursachort	$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$ $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$ $M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{ohne Streufluss}$ $M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{mit Streufluss}$ $k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \quad k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$ $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - k^2$	<table> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>$[Vs]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss durch Windung</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Streuluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[\frac{Vs}{A}]$</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Windungszahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Kopplungsfak.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Streukoeff.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Gegeninduktivität</td><td>$[\frac{Vs}{A}]$</td></tr> </table>	Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$	Φ	Magnetischer Fluss durch Windung	$[Vs], [Wb]$	Φ	Magnetischer Streuluss	$[Vs], [Wb]$	L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	N	Windungszahl	$[1]$	I	Strom	$[A]$	k	Kopplungsfak.	$[1]$	σ	Streukoeff.	$[1]$	M	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$
Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$																											
Φ	Magnetischer Fluss durch Windung	$[Vs], [Wb]$																											
Φ	Magnetischer Streuluss	$[Vs], [Wb]$																											
L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																											
N	Windungszahl	$[1]$																											
I	Strom	$[A]$																											
k	Kopplungsfak.	$[1]$																											
σ	Streukoeff.	$[1]$																											
M	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																											

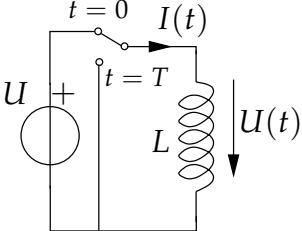
12.11 Brechung magnetischer Feldlinien

	$B_{n1} = B_{n2}$ $\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$ $H_{t1} = H_{t2}$ $\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$ $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	α	Winkel	$[rad]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$												
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$												
α	Winkel	$[rad]$												
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$												

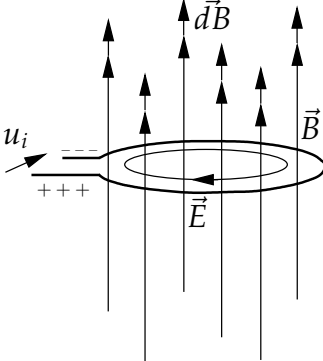
12.12 Räumliche Energiedichte

	Inhomogenes Feld:	W	Energiedichte	$\left[\frac{Ws}{m^3}\right]$
	$W_{mg(x,y,z)} = \frac{1}{2} B_{(x,y,z)} H_{(x,y,z)}$	H	Feldstärke	$\left[\frac{J}{m^3}\right]$
	Homogenes Feld:	B	Flussdichte, Induktion	$\left[\frac{A}{m}\right]$
	$W_{mg(x,y,z)} = \frac{\mu}{2} H_{(x,y,z)}^2$	μ	Permeabilität	$\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$

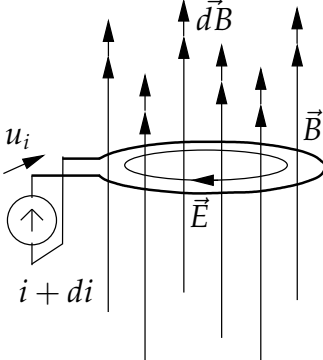
12.13 Energie im magnetischen Feld

	für $t \geq T$:	W	Energie	$[Ws]$
	$W = \frac{U^2 T^2}{2L}$	μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$
	$W = \frac{\psi^2}{2L}$	Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$
	$W = \frac{LI^2}{2}$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs]$
	$W = \frac{I\Psi}{2}$	L	Induktivität	$[Wb]$
	$W = \frac{\Phi^2 R_m}{2}$	R_m	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$
	$W = \frac{\Theta^2 \Lambda}{2}$	I	Strom	$[A]$
		Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$

12.14 Induktionsgesetz

	$u_i = \frac{d\Psi}{dt}$ $\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -u_i$ $\vec{E}$ bildet mit $d\vec{B}$ eine Linksschraube	<table> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>$[Vs]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Elektrostatisches Feld</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr> <td>u_i</td><td>Induktionsspannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>ds</td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> </table>	Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$	t	Zeit	$[s]$	E	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$	u_i	Induktionsspannung	$[V]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$
Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$																					
t	Zeit	$[s]$																					
E	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$																					
u_i	Induktionsspannung	$[V]$																					
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					
ds	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																					
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																					

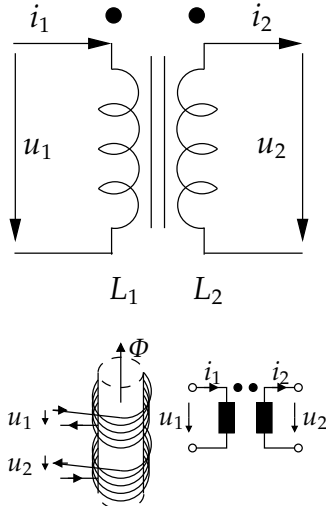
12.15 Selbstinduktion

 di während dt	Für Schleife: $u_i = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$ Für Spule: $u_i = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$	<table> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>$[Vs]$</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Elektrostatisches Feld</td><td>$[\frac{V}{m}]$</td></tr> <tr> <td>u_i</td><td>Induktionsspannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[\frac{Vs}{A}]$</td></tr> <tr> <td>i</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> </table>	Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$	t	Zeit	$[s]$	E	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$	u_i	Induktionsspannung	$[V]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	i	Strom	$[A]$	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$
Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$																								
t	Zeit	$[s]$																								
E	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$																								
u_i	Induktionsspannung	$[V]$																								
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																								
L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																								
i	Strom	$[A]$																								
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																								

12.16 Serie- und Parallelschaltung von Induktivitäten

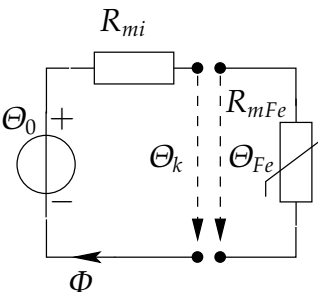
	Serieschaltung $L_{Ers.} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ Parallelschaltung $L_{Ers.} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}}$	L Induktivität $\left[\frac{Vs}{A}\right]$
--	--	---

12.17 Trafogleichungen

	$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = u_{21} + u_{22} = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$ $u_1 = j\omega L_1 i_1 - j\omega M i_2$ $u_2 = j\omega M i_1 - j\omega L_2 i_2$	u Induktions- spannung $[V]$ i Strom $[A]$ L Induktivität $\left[\frac{Vs}{A}\right]$ t Zeit $[s]$ M Gegeninduk- tivität $\left[\frac{Vs}{A}\right]$ ω Kreisfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ R (Kupfer-) Wi- derstand $[\Omega]$
--	---	---

12.18 Nichtlinearität

12.18.1 $B(H)$ -Kurve in $\Phi(\Theta)$ -Kurve umrechnen

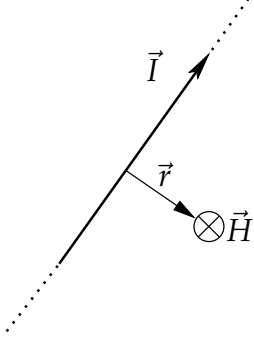
	Leerlauf $B_k(0) = B_c = \frac{\mu_0 A_L \Theta_0}{l_L A_{Fe}}$ Kurzschluss $H_0 = \frac{\Theta_0}{l_{Fe}}$ Umrechnung: $\Phi_{Fe} = A_{Fe} B_{Fe}$ $\Theta_{Fe} = l_{Fe} H_{Fe}$ $B_L = \frac{A_{Fe}}{A_L} B_{Fe}$	<table> <tr> <td>B</td><td>Flussdichte, Induktion</td><td>$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$</td></tr> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> <tr> <td>Θ</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Querschnitt</td><td>$[m^2]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> </table>	B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	Θ	Durchflutung	$[A]$	l	Länge	$[m]$	A	Querschnitt	$[m^2]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$
B	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																					
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																					
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																					
Θ	Durchflutung	$[A]$																					
l	Länge	$[m]$																					
A	Querschnitt	$[m^2]$																					
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					

12.18.2 Luftspaltkennwert α

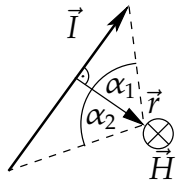
	$\alpha = \frac{A_L l_{Fe}}{A_{Fe} l_L}$ $\frac{1}{\mu_{reff}} = \frac{1}{\mu_{rFe}} + \frac{1}{\alpha}$ $\mu_{reff} = \frac{\mu_{rFe} \alpha}{\mu_{rFe} + \alpha}$	<table> <tr> <td>α</td><td>Luftspaltkenngrösse</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Querschnitt</td><td>$[m^2]$</td></tr> </table>	α	Luftspaltkenngrösse	$[1]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	l	Länge	$[m]$	A	Querschnitt	$[m^2]$
α	Luftspaltkenngrösse	$[1]$												
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$												
l	Länge	$[m]$												
A	Querschnitt	$[m^2]$												

12.19 Spezielle Anordnungen

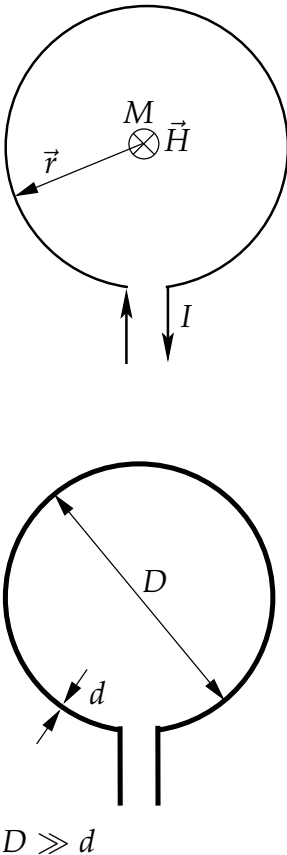
12.19.1 Langer gerader Leiter $l \gg d$

	Bezugspunkt ausserhalb des Leiters im Abstand r $H = \frac{I}{2\pi r}$ $\vec{H} = \frac{I}{2\pi \vec{r} ^2}(\vec{e}_1 \times \vec{r})$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Abstand vom Leiter</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	r	Abstand vom Leiter	$[m]$	I	Strom	$[A]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$									
r	Abstand vom Leiter	$[m]$									
I	Strom	$[A]$									

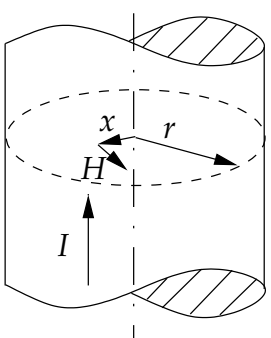
12.19.2 Kurzer, gerader Leiter

	$H = \frac{I}{4\pi r} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \varphi d\varphi$ $H = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Abstand vom Leiter</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Winkel</td><td>$[rad]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	r	Abstand vom Leiter	$[m]$	I	Strom	$[A]$	α	Winkel	$[rad]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$												
r	Abstand vom Leiter	$[m]$												
I	Strom	$[A]$												
α	Winkel	$[rad]$												

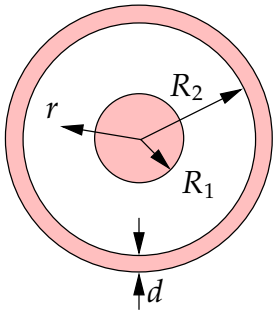
12.19.3 Kreisförmige Drahtschleife

 $D \gg d$	Bezugspunkt: M Teilkreis: $H = \frac{I}{4\pi r} \int_0^\alpha d\varphi$ Vollkreis: $H = \frac{I}{2r}$ Feld auf der Achse: $H = \frac{ I r^2}{2(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\Phi = \frac{\mu D}{2} \ln \frac{D}{d} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Mittelpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$[\frac{H}{m}]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Draht Durchmesser</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Schleifen Durchmesser</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$</td></tr> <tr> <td>$R_m$</td><td>Magnetischer Widerstand</td><td>$[\frac{A}{Vs}]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>$[\frac{Vs}{A}]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>Θ</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>x</td><td>senkrechter Abstand zu M</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	M	Mittelpunkt		I	Strom	$[A]$	r	Radius	$[m]$	μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	d	Draht Durchmesser	$[m]$	D	Schleifen Durchmesser	$[m]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	Θ	Durchflutung	$[A]$	x	senkrechter Abstand zu M	$[m]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																																							
M	Mittelpunkt																																								
I	Strom	$[A]$																																							
r	Radius	$[m]$																																							
μ	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																																							
d	Draht Durchmesser	$[m]$																																							
D	Schleifen Durchmesser	$[m]$																																							
Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																																							
R_m	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																																							
L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																																							
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																																							
Θ	Durchflutung	$[A]$																																							
x	senkrechter Abstand zu M	$[m]$																																							

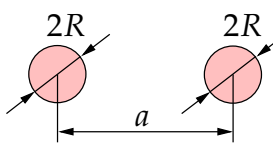
12.19.4 Voller Leiter

	$H = \frac{Ix}{2\pi r^2}$ gilt nur für $x \leq r$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$[\frac{A}{m}]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Abstand von der Leiterachse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>x</td><td>Abstand von der Achse</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	r	Abstand von der Leiterachse	$[m]$	I	Strom	$[A]$	x	Abstand von der Achse	$[m]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$												
r	Abstand von der Leiterachse	$[m]$												
I	Strom	$[A]$												
x	Abstand von der Achse	$[m]$												

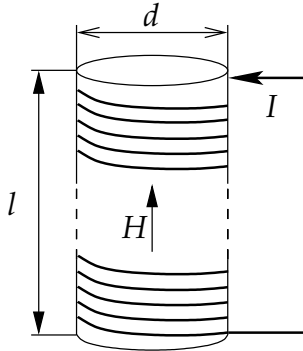
12.19.5 Koaxialkabel

 $l \gg R_1, R_2$	$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \quad \text{für } 0 \leq r < R_1$ $H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{für } R_1 \leq r \leq R_2$ $H = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r - R_2}{d} \right) \quad \text{für } R_2 < r \leq R_2 + d$ $\Phi = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu l \ln \frac{R_2}{R_1}}$ $L = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$	<table> <tr> <td>H</td><td>Feldstärke</td><td>$\left[\frac{A}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>r</td><td>Abstand von der Leiterachse</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>d</td><td>Manteldicke</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$\left[\frac{H}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$</td></tr> <tr> <td>$R_m$</td><td>Magnetischer Widerstand</td><td>$\left[\frac{A}{Vs}\right]$</td></tr> <tr> <td>$L'$</td><td>Induktivitätsbelag</td><td>$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$</td></tr> <tr> <td>$L$</td><td>Induktivität</td><td>$\left[\frac{Vs}{A}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\Phi$</td><td>Magnetischer Fluss</td><td>$[Vs], [Wb]$</td></tr> <tr> <td>Θ</td><td>Durchflutung</td><td>$[A]$</td></tr> </table>	H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	r	Abstand von der Leiterachse	$[m]$	I	Strom	$[A]$	R	Radius	$[m]$	d	Manteldicke	$[m]$	μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$	l	Länge	$[m]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$	R_m	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$	L'	Induktivitätsbelag	$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$	L	Induktivität	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$	Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	Θ	Durchflutung	$[A]$
H	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$																																							
r	Abstand von der Leiterachse	$[m]$																																							
I	Strom	$[A]$																																							
R	Radius	$[m]$																																							
d	Manteldicke	$[m]$																																							
μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$																																							
l	Länge	$[m]$																																							
Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$																																							
R_m	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$																																							
L'	Induktivitätsbelag	$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$																																							
L	Induktivität	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$																																							
Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																																							
Θ	Durchflutung	$[A]$																																							

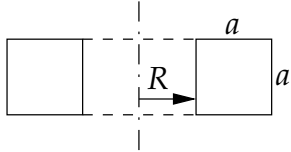
12.19.6 Paralleldrahtleitung

 $l \gg a$ $a \gg R$	$\Lambda = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $R_m = \frac{\pi}{\mu l \ln \frac{a - R}{R}}$ $L = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{a - R}{R}$	<table> <tr> <td>μ</td><td>Permeabilität</td><td>$\left[\frac{H}{m}\right]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Länge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>a</td><td>Abstand</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert</td><td>$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$</td></tr> <tr> <td>$R_m$</td><td>Magnetischer Widerstand</td><td>$\left[\frac{A}{Vs}\right]$</td></tr> <tr> <td>$L'$</td><td>Induktivitätsbelag</td><td>$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$</td></tr> <tr> <td>$L$</td><td>Induktivität</td><td>$\left[\frac{Vs}{A}\right]$</td></tr> </table>	μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$	l	Länge	$[m]$	a	Abstand	$[m]$	R	Radius	$[m]$	Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$	R_m	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$	L'	Induktivitätsbelag	$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$	L	Induktivität	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$
μ	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$																								
l	Länge	$[m]$																								
a	Abstand	$[m]$																								
R	Radius	$[m]$																								
Λ	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$																								
R_m	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$																								
L'	Induktivitätsbelag	$\left[\frac{Vs}{Am}\right]$																								
L	Induktivität	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$																								

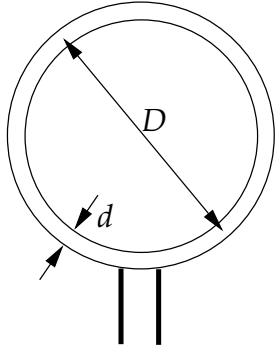
12.19.7 Zylinderspule

	Bezugspunkt: Mittelpunkt der Achse im Innern $H = \frac{IN}{\sqrt{l^2 + d^2}}$ Bezugspunkt: Mittelpunkt der Stirnflächen $H = \frac{IN}{2\sqrt{l^2 + d^2}}$	H Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ l Länge bzw. mittl. Umfang der Spule $[m]$ d Durchmesser $[m]$ I Strom $[A]$ A Stirnfläche $[m^2]$ μ Permeabilität $\left[\frac{H}{m}\right]$ N Windungszahl $[1]$ Λ Magnetischer Leitwert $\left[\frac{Vs}{A}\right], \left[\Omega s\right]$ R_m Magnetischer Widerstand $\left[\frac{A}{Vs}\right]$
Sehr lange Zylinderspule ($l \gg d$) und Ringspule (mittlerer Umfang l)	Bezugspunkt für H-Feld: im Inneren der Spule $H = \frac{IN}{l}$ $\Phi = \frac{\mu A}{l} \Theta = \mu \frac{\pi d^2}{4l} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{A}{l} = \mu \frac{\pi d^2}{4l}$ $R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{4l}{\mu \pi d^2}$ $L = \mu N^2 \frac{A}{l} = \mu N^2 \frac{\pi d^2}{4l}$	L Induktivität $\left[\frac{Vs}{A}\right]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs], [Wb]$ Θ Durchflutung $[A]$

12.19.8 Ringspule (Toroid)

	$\Lambda = \mu \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu a \ln \frac{R+a}{R}}$ $L = \mu N^2 \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $\Phi = \frac{\mu a}{2\pi} \ln \frac{R_1+a}{R_1} \Theta$ $H = \frac{NI}{R + \frac{a}{2}n}$ für $a \ll R$: $L = \frac{\mu N^2 A}{2R\pi}$ $\Phi \approx \frac{\mu A}{l_{\text{mittl.}}} \Theta$	<table><tr><td>a</td><td>Spulen Breite, [m] Höhe</td></tr><tr><td>R</td><td>Innenradius [m]</td></tr><tr><td>μ</td><td>Permeabilität [$\frac{H}{m}$]</td></tr><tr><td>N</td><td>Windungszahl [1]</td></tr><tr><td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]</td></tr><tr><td>R_m</td><td>Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]</td></tr><tr><td>L</td><td>Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]</td></tr><tr><td>Φ</td><td>Magnetischer Fluss [Vs], [Wb]</td></tr><tr><td>Θ</td><td>Durchflutung [A]</td></tr><tr><td>A</td><td>Fläche [m^2]</td></tr></table>	a	Spulen Breite, [m] Höhe	R	Innenradius [m]	μ	Permeabilität [$\frac{H}{m}$]	N	Windungszahl [1]	Λ	Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]	R_m	Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]	L	Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]	Φ	Magnetischer Fluss [Vs], [Wb]	Θ	Durchflutung [A]	A	Fläche [m^2]
a	Spulen Breite, [m] Höhe																					
R	Innenradius [m]																					
μ	Permeabilität [$\frac{H}{m}$]																					
N	Windungszahl [1]																					
Λ	Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]																					
R_m	Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]																					
L	Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]																					
Φ	Magnetischer Fluss [Vs], [Wb]																					
Θ	Durchflutung [A]																					
A	Fläche [m^2]																					

12.19.9 Kreisrahmenspule

 $D \gg d$	$\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu N^2 \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	<table><tr><td>a</td><td>Spulen Breite, [m] Höhe</td></tr><tr><td>μ</td><td>Permeabilität [$\frac{H}{m}$]</td></tr><tr><td>d</td><td>Draht Durchmesser</td></tr><tr><td>D</td><td>Schleifen Durchmesser [m]</td></tr><tr><td>N</td><td>Windungszahl [1]</td></tr><tr><td>Λ</td><td>Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]</td></tr><tr><td>R_m</td><td>Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]</td></tr><tr><td>L</td><td>Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]</td></tr></table>	a	Spulen Breite, [m] Höhe	μ	Permeabilität [$\frac{H}{m}$]	d	Draht Durchmesser	D	Schleifen Durchmesser [m]	N	Windungszahl [1]	Λ	Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]	R_m	Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]	L	Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]
a	Spulen Breite, [m] Höhe																	
μ	Permeabilität [$\frac{H}{m}$]																	
d	Draht Durchmesser																	
D	Schleifen Durchmesser [m]																	
N	Windungszahl [1]																	
Λ	Magnetischer Leitwert [$\frac{Vs}{A}$], [Ωs]																	
R_m	Magnetischer Widerstand [$\frac{A}{Vs}$]																	
L	Induktivität [$\frac{Vs}{A}$]																	

13 Wechselstromlehre

13.1 Mittel- und Kennwerte

13.1.1 Linearer Mittelwert

	$A_m = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt$	A Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer [s] t Zeit [s]
--	--	---

13.1.2 Betragsmittelwert

	$A_{ m } = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt$	A Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer [s] t Zeit [s]
--	--	---

13.1.3 Halbwellenmittelwert

	$A_{2m} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt$ für $a(t) > 0$	A_{2m} Halbwellen- mittelwert [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer [s] t Zeit [s]
--	---	---

13.1.4 Quadratischer Mittelwert (Effektivwert, RMS)

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t) dt}$ für sinunsförmige Signale: $A_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$	A Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer [s] t Zeit [s]
--	--	---

13.1.5 Scheitelfaktor (Crestfaktor)

	$k_s = \frac{a_{\text{max}}}{A_{\text{eff}}}$	A_{eff} Effektivwert [...] a_{max} Spitzenwert [...] k_s Crestfaktor [1]
--	---	--

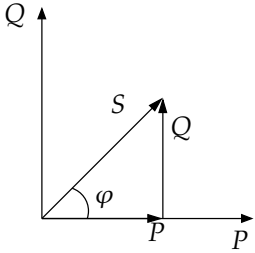
13.1.6 Formfaktor

	$k_f = \frac{A_{\text{eff}}}{A_{ m }}$	A_{eff} Effektivwert [...] $A_{ m }$ Betragsmittelwert [...] k_f Formfaktor [1]
--	--	--

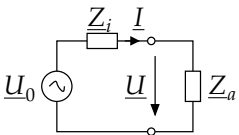
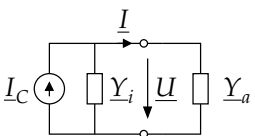
13.1.7 Effektivwert eines zusammengesetzten, mehrfrequenten Signals

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{n=0}^N A_{\text{eff}_n}^2}$	A_{eff} Effektivwert [...]
--	---	-------------------------------------

13.2 Leistung

 Beispiel mit Induktiver Last	$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$ $\underline{S} = P + jQ$ $P = UI \cos(\varphi) = \operatorname{Re}(S)$ $Q = UI \sin(\varphi) = \operatorname{Im}(S)$ $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$	<table> <tr><td>S</td><td>Scheinleistung</td><td>[VA]</td></tr> <tr><td>P</td><td>Wirkleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td>Q</td><td>Blindleistung</td><td>[Var]</td></tr> <tr><td>I</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>φ</td><td>Phase</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td>Z</td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	S	Scheinleistung	[VA]	P	Wirkleistung	[W]	Q	Blindleistung	[Var]	I	Strom	[A]	U	Spannung	[V]	φ	Phase	[rad]	Z	Impedanz	[Ω]
S	Scheinleistung	[VA]																					
P	Wirkleistung	[W]																					
Q	Blindleistung	[Var]																					
I	Strom	[A]																					
U	Spannung	[V]																					
φ	Phase	[rad]																					
Z	Impedanz	[Ω]																					

13.2.1 Leistung und Leistungsanpassung bei Quellen

	$\underline{S} = U_0^2 \frac{Z_a}{ Z_i + Z_a ^2}$ $P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}$ Bei Leistungsanpassung: $X_a = -X_i \quad \text{bzw.} \quad R_a = R_i$ $\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$ $P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$	<table> <tr><td>S</td><td>Scheinleistung</td><td>[VA]</td></tr> <tr><td>P</td><td>Wirkleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td>I</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>Z</td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>Y</td><td>Admittanz</td><td>[S]</td></tr> <tr><td>X</td><td>Reaktanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>G</td><td>Leitwert</td><td>[S]</td></tr> </table>	S	Scheinleistung	[VA]	P	Wirkleistung	[W]	I	Strom	[A]	U	Spannung	[V]	Z	Impedanz	[Ω]	Y	Admittanz	[S]	X	Reaktanz	[Ω]	R	Widerstand	[Ω]	G	Leitwert	[S]
S	Scheinleistung	[VA]																											
P	Wirkleistung	[W]																											
I	Strom	[A]																											
U	Spannung	[V]																											
Z	Impedanz	[Ω]																											
Y	Admittanz	[S]																											
X	Reaktanz	[Ω]																											
R	Widerstand	[Ω]																											
G	Leitwert	[S]																											
	$\underline{Y}_a = \underline{Y}_i^*$ $P_{\max} = \frac{I_C^2}{4G_i}$																												

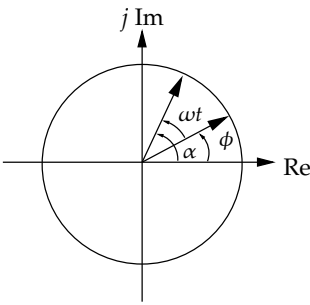
13.2.2 Effektivwert und Leistung

	$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 R$	<table> <tr><td>P</td><td>Leistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> </table>	P	Leistung	[W]	R	Widerstand	[Ω]	U	Spannung	[V]
P	Leistung	[W]									
R	Widerstand	[Ω]									
U	Spannung	[V]									

13.3 Energie

	$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau$	W P t	Energie Leistung Zeit	[J] [W] [s]
--	---------------------------------	--	--	--

13.4 Komplexe Darstellung sinusförmiger Vorgänge

	Hintransformation: $a(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j\omega t}$ $\underline{A} = A e^{j\phi}$ Rücktransformation: $\underline{B} = B e^{j\beta}$ $\underline{b}(t) = \underline{B} e^{j\omega t} = B e^{j\beta} e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j\omega t}$ $\underline{b}(t) = B \cos(\omega t + \beta) + jB \sin(\omega t + \beta)$ $b(t) = \text{Re}\{\underline{b}(t)\} = B \cos(\omega t + \beta)$	A, B Amplitude [V] a, b Signal [V] φ, β Phase [rad] ω Winkelgeschwindigkeit [$\frac{1}{s}$] t Zeit [s]
---	--	--

13.5 Komplexe Darstellung von Impedanz und Admittanz

Impedanz-Ebene: Admittanz-Ebene:	$\underline{Z} = \frac{u(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_{\text{eff}}}{\underline{I}_{\text{eff}}} = R + jX$ $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$ $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$ $\sum_{\text{Kreis}} \underline{U}_i = 0 \quad \sum_{\text{Trennbündel}} \underline{I}_i = 0$ Serieschaltung: $\underline{Z}_s = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i$ Parallelschaltung: $\underline{Y}_p = \sum_i \underline{Y}_i$	U, u Spannung [V] I, i Strom [I] R Widerstand [Ω] G Leitwert [S] Z Impedanz [Ω] Y Admittanz [S] X Reaktanz [Ω] B Suszeptanz [S]
--	--	---

13.6 Klemmgrößen von Schaltelementen

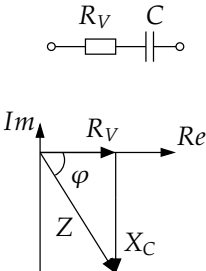
13.6.1 Allgemein

$q(t) = \int_{t_a}^t i(\tau) d\tau$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $p(t) = \frac{dW}{dt}$ $P_{at} = \frac{1}{t - t_a} \int_{t_a}^t p(\tau) d\tau$ $w_{at} = \int_{t_a}^t p(\tau) d\tau$	i Strom [A] u Spannung [V] q Ladung [C] p Leistung [W] w Gespeicherte Energie [J] t, τ Zeit [s]
--	--

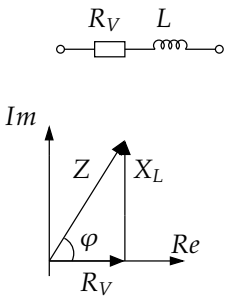
13.6.2 Ohm'sche Widerstände

	$u(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gu(t)$ $p(t) = u(t)i(t)$ $\underline{Z}_R = R$ $\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	i Strom [A] u Spannung [V] R Widerstand [Ω] G Leitwert [S] p Leistung [W] Z Impedanz [Ω] t, τ Zeit [s]
--	---	--

13.6.3 Kapazitäten

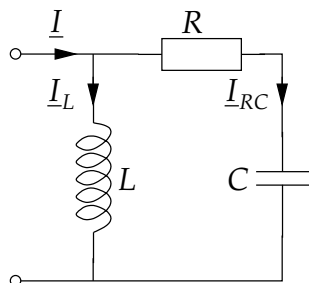
	Zeitbereich: $q(t) = Cu(t)$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_a}^t i(\tau) d\tau + u(t_a)$ Frequenzbereich: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC} = -j \frac{1}{\omega C}$ $\underline{Y}_C = j\omega C = sC$ Leistung, Energie: $p(t) = u(t)i(t)$ $w(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$	i Strom [A] u Spannung [V] q Ladung [C] C Kapazität [F] p Leistung [W] Z Impedanz [Ω] Y Admitanz [S] ω Kreisfrequenz [$\frac{1}{s}$] s Laplaceoperator w Gespeicherte Energie [J] t, τ Zeit [s]
--	--	--

13.6.4 Induktivitäten

	Zeitbereich: $\Psi(t) = Li(t)$ $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_a}^t u(\tau) d\tau + i(t_a)$ $p(t) = u(t)i(t)$ $w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$ Frequenzbereich: $\underline{Z}_L = j\omega L = sL$ $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{sL} = -j \frac{1}{\omega L}$ Gegeninduktion: $u_{12}(t) = \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$ $\underline{Z}_M = j\omega M$ $\underline{Y}_M = \frac{1}{j\omega M} = -j \frac{1}{\omega M}$ induktive Kopplung: $u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$	<table> <tr> <td>i</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>u</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>q</td><td>Ladung</td><td>[C]</td></tr> <tr> <td>Z</td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>Y</td><td>Admitanz</td><td>[S]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>[$\frac{1}{s}$]</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Laplaceoperator</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Gegeninduktivität</td><td>[$\frac{Vs}{A}$]</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Induktivität</td><td>[$\frac{Vs}{A}$]</td></tr> <tr> <td>Ψ</td><td>Spulenfluss</td><td>[Vs]</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Leistung</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>w</td><td>Gespeicherte Energie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>t, τ</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> </table>	i	Strom	[A]	u	Spannung	[V]	q	Ladung	[C]	Z	Impedanz	[Ω]	Y	Admitanz	[S]	ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]	s	Laplaceoperator	[1]	M	Gegeninduktivität	[$\frac{Vs}{A}$]	L	Induktivität	[$\frac{Vs}{A}$]	Ψ	Spulenfluss	[Vs]	p	Leistung	[W]	w	Gespeicherte Energie	[J]	t, τ	Zeit	[s]
i	Strom	[A]																																							
u	Spannung	[V]																																							
q	Ladung	[C]																																							
Z	Impedanz	[Ω]																																							
Y	Admitanz	[S]																																							
ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]																																							
s	Laplaceoperator	[1]																																							
M	Gegeninduktivität	[$\frac{Vs}{A}$]																																							
L	Induktivität	[$\frac{Vs}{A}$]																																							
Ψ	Spulenfluss	[Vs]																																							
p	Leistung	[W]																																							
w	Gespeicherte Energie	[J]																																							
t, τ	Zeit	[s]																																							

13.7 Zeigerdarstellung Komplexer Klemmgrößen

Alle Spannungen und Ströme am folgenden Netzwerk sind graphisch mittels Zeigerdiagramm darzustellen.

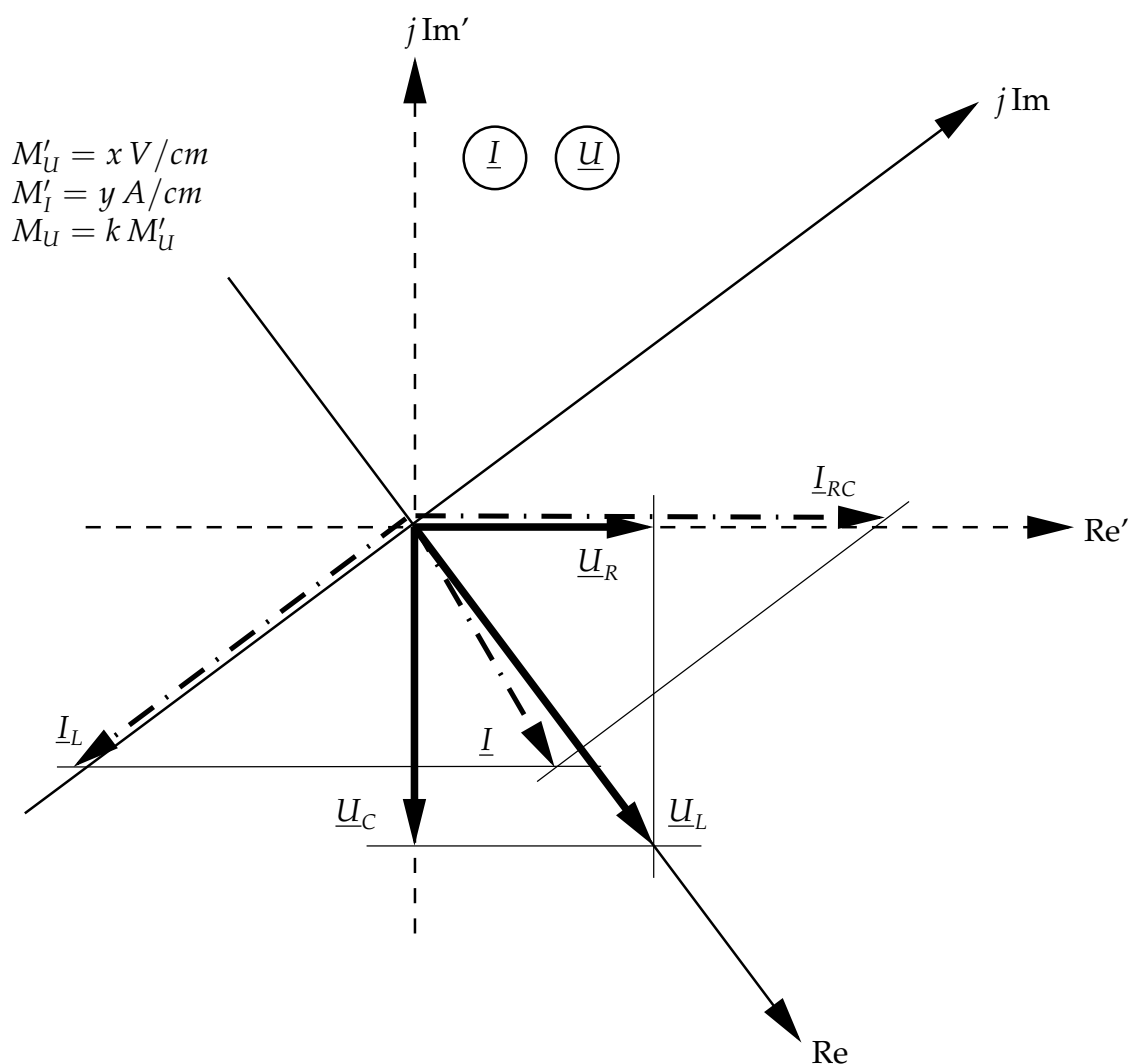


1. Impedanzen $\underline{Z}$ aller Elemente berechnen.
2. Strom $\underline{I}_{RC}$ auf reeller Achse Re' wählen.

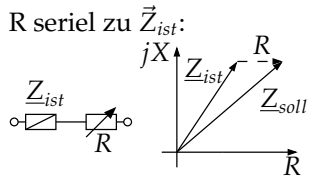
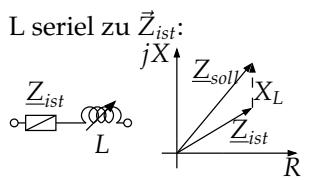
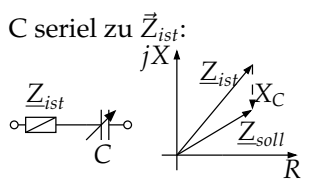
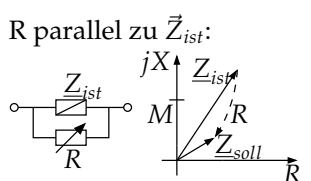
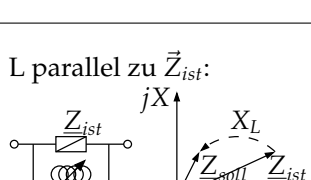
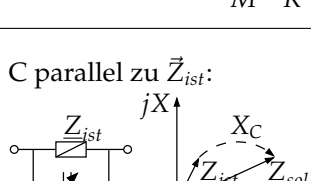
3. Spannungen an $\underline{R}$ und $\underline{C}$ aus $\underline{I}_{RC}$ und $\underline{Z}$ berechnen und einzeichnen.
4. Spannung $\underline{U}_L$ entspricht der Summe von $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$.

$$\text{Korrekturfaktor: } k = \frac{\underline{U}_{\text{Nenn}}}{\underline{U}_{\text{gemessen}}}$$

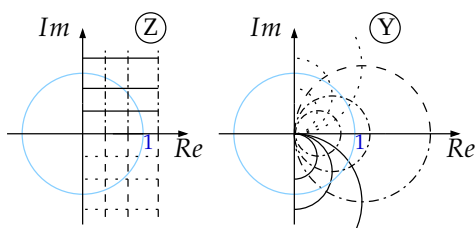
5. Strom $\underline{I}_L$ aus $\underline{U}_L$ und $\underline{Z}_L$ berechnen und einzeichnen.
6. Strom $\underline{I}$ entspricht der Summe von $\underline{I}_{RC}$ und $\underline{I}_L$.
7. Achsen neu bestimmen: Re in Richtung $\underline{U}_L$.



13.7.1 Impedanztransformation

R serie zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur R-Achse nach rechts.	Z_{ist} Impedanz, $[\Omega]$ die transformiert werden soll
L serie zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach oben.	Z_{soll} Impedanz, $[\Omega]$ nach Transformation
C serie zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach unten.	X Blindwiderstand $[\Omega]$ R Widerstand $[\Omega]$ L Induktivität $[H]$ C Kapazität $[F]$
R parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Halbkreis, welcher auf der X-Achse beginnt, durch den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$-Vektors geht um im Nullpunkt endet. Falls $R = 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{0}$. Falls $R = \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{Z}_{ist}$.	
L parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt sowie durch den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$-Vektors geht. Für $L \rightarrow 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} \rightarrow 0$	
C parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt und den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$-Vektors geht. Für $C \rightarrow \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} \rightarrow 0$	

13.7.2 Transformation von Z-Ebene zu Y-Ebene

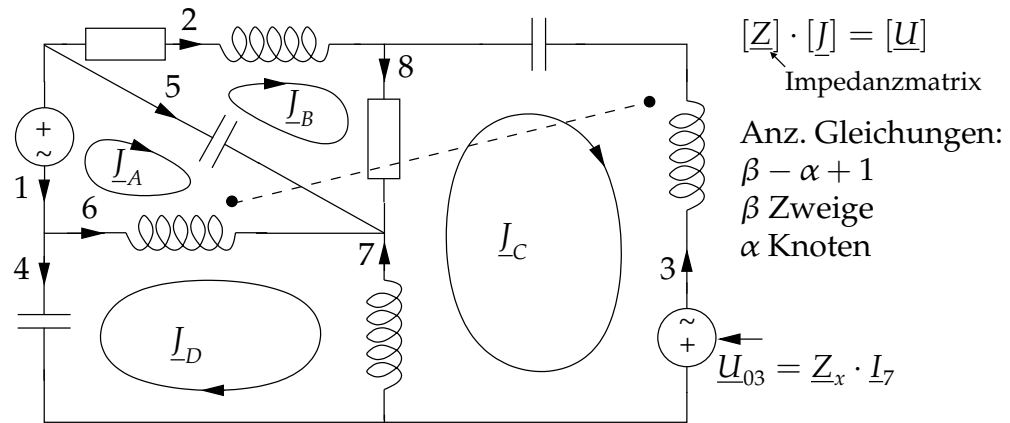


Im Bild ist zu sehen wie gewisse Punktmengen von der Z-Ebene auf die Y-Ebene abgebildet werden.

13.8 Netzwerkanalyse

13.8.1 Maschenmethode / Kreisstrommethode

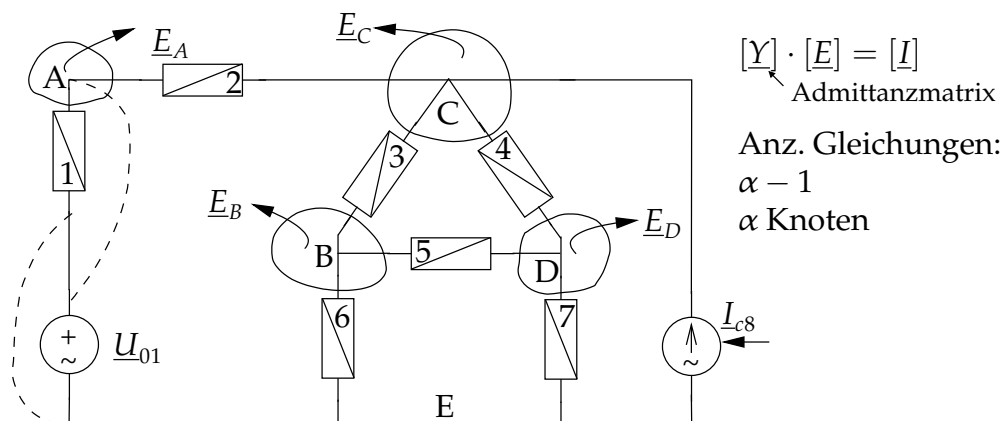
Es dürfen nur Spannungsquellen vorkommen, vorhandene Stromquellen sind zuerst umzuwandeln.



I_A	I_B	I_C	I_D	
$+I_A(j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_5})$	$-I_B(-j\frac{1}{\omega C_5})$	$+I_C j\omega M$	$-I_D j\omega L_6$	$= \underline{U}_{01}$
$-I_A(-j\frac{1}{\omega C_5})$	$+I_B(R_8 + R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_5})$	$-I_C R_8$	-0	$= 0$
$+I_A j\omega M$	$-I_B R_8$	$+I_C(R_8 + j\omega L_7 + j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3} + \underline{Z}_x)$	$-I_D(\underline{Z}_x + j\omega M + j\omega L_7)$	$= 0$
$-I_A j\omega L_6$	-0	$-I_C(j\omega L_7 + j\omega M)$	$+I_D(j\omega L_6 + j\omega L_7 - j\frac{1}{\omega C_4})$	$= 0$

13.8.2 Trennbündelmethode / Knotenspannungsmethode

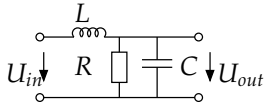
Es dürfen nur Stromquellen vorkommen, vorhandene Spannungsquellen sind zuerst umzuwandeln.



E_A	E_B	E_C	E_D	
$+E_A(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)$	-0	$-E_C \underline{Y}_2$	-0	$= \underline{U}_{01} \underline{Y}_1$
-0	$+E_B(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6)$	$-E_C \underline{Y}_3$	$-E_D \underline{Y}_5$	$= 0$
$-E_A \underline{Y}_2$	$-E_B(\underline{Y}_3 + k \underline{Y}_6)$	$+E_C(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)$	$-E_D \underline{Y}_4$	$= 0$
-0	$-E_B \underline{Y}_5$	$-E_C \underline{Y}_4$	$+E_D(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_7)$	$= 0$

13.9 Darstellungsformen

13.9.1 Beispiel: Nyquistdiagramm, Ortskurve

 $R = 2k\Omega, L = 10mH, C = 10nF$	$\underline{G} = \frac{U_{out}}{U_{in}}$ $\underline{G} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$ tiefe f ($\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$): $\underline{G} \approx 1 \angle 0^\circ$ hohe f ($\omega \gg \frac{1}{\sqrt{LC}}$): $\underline{G} \approx \frac{1}{\omega^2 LC} \angle -180^\circ$ Achsenschnittpunkte: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $Re(\underline{G}) = 0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \underline{G} = -2j$ $Im(\underline{G}) = 0 \rightarrow \omega \rightarrow 1$	<table><tr><td>G</td><td>Frequenzgang, [1]</td></tr><tr><td></td><td>Verstärkung</td></tr><tr><td>ω</td><td>Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$</td></tr><tr><td>U</td><td>Spannung $[V]$</td></tr><tr><td>L</td><td>Induktivität $[H]$</td></tr><tr><td>C</td><td>Kapazität $[C]$</td></tr><tr><td>R</td><td>Widerstand $[\Omega]$</td></tr></table>	G	Frequenzgang, [1]		Verstärkung	ω	Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$	U	Spannung $[V]$	L	Induktivität $[H]$	C	Kapazität $[C]$	R	Widerstand $[\Omega]$
G	Frequenzgang, [1]															
	Verstärkung															
ω	Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$															
U	Spannung $[V]$															
L	Induktivität $[H]$															
C	Kapazität $[C]$															
R	Widerstand $[\Omega]$															

13.9.2 Bodediagramm

Vorgehen beim Erstellen eines Bodediagramms:

Netzwerkfunktion aufstellen
$$F(\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_n (j\omega)^n}$$

In Produktform
$$F(\omega) = K_1 \prod_{i=1}^r \text{Standardterme}, \quad K_1 = \frac{a_0}{b_0}$$

Standardterme
$$\begin{cases} (j\omega T)^n \\ (1 + j\omega T)^n \\ [1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2]^n \end{cases} \quad n \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2 = \begin{cases} (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) & \text{für } \xi > 1 \\ (1 + j\omega T)^2 & \text{für } \xi = 1 \\ \text{nicht aufspaltbar} & \text{für } \xi < 1 \end{cases}$$

Normierung

- Frequenz: Bezugsfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{T_0} \implies$ normierte Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega T_0$
Beispiele: $\omega_0 = \frac{1}{T} \implies \Omega = \omega T$ oder $\omega_0 = 1 \frac{1}{s} \implies \Omega = \omega 1s$
- Wert: Bezugswert $K_0 \implies$ normierte Konstante $K = \frac{K_1}{K_0}$
Beispiel: $K_0 = K_1 \implies K = 1$

Normierte Netzwerkfunktion $F(\omega) \Rightarrow F_n(\Omega) = F_n(\omega T_0) = F_n(\frac{\omega}{\omega_0})$

Normierte Standardterme

$$\begin{aligned} (j\omega T)^n &\Rightarrow (j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ (1 + j\omega T)^n &\Rightarrow (1 + j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ [1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2]^n &\Rightarrow \left[1 + 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right]^n \end{aligned}$$

Bodediagramm

- Betrag, Amplitudengang: $|G|/dB = \sum_{i=1}^r 20 \log_{10}\{|norm.Standardterme|\} + 20 \log_{10} K$
- Argument, Phasengang: $\varphi = \sum_{i=1}^r \arg\{norm.Standardterme\}$

P-Glied: Standardterm K

	Form: K Steigung: $0 \frac{dB}{DK}$ $ G = 20 \log_{10}(K)$ $\varphi = const_0$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>$[dB]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>$[^\circ]$</td></tr> </table>	K	Konstante	$[1]$	G	Verstärkung	$[dB]$	φ	Phase	$[^\circ]$
K	Konstante	$[1]$									
G	Verstärkung	$[dB]$									
φ	Phase	$[^\circ]$									

I-Glied: Standardterm $(j\omega T)^n$

	Form: $(j\omega T)^n$ Normalisiert: $(j\omega \frac{T}{T_0})^n$ Amplitude: $G = \omega^n T^n$ $G \Rightarrow$ Gerade Steigung: $n \cdot 20 \frac{dB}{DK}$ Falls $\Omega = \frac{T_0}{T} \Rightarrow G = 0$ Phase φ: $\varphi = n \cdot 90^\circ$ Siehe auch S.163 $\frac{G_a}{G_b} = \frac{\omega_a^n}{\omega_b^n}, \quad n = \pm 1$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>$[dB]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>$[^\circ]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Exponent</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>T_0</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>Ω</td><td>Normierte Frequenz</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	K	Konstante	$[1]$	G	Verstärkung	$[dB]$	φ	Phase	$[^\circ]$	n	Exponent	$[1]$	T	Periode	$[s]$	T_0	Periode	$[s]$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	Ω	Normierte Frequenz	$[1]$
K	Konstante	$[1]$																								
G	Verstärkung	$[dB]$																								
φ	Phase	$[^\circ]$																								
n	Exponent	$[1]$																								
T	Periode	$[s]$																								
T_0	Periode	$[s]$																								
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																								
Ω	Normierte Frequenz	$[1]$																								

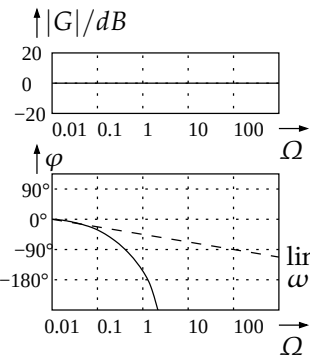
PT₁-Glied: Standardterm $(1 + j\omega T)^n$

	Form: $(1 + j\omega T)^n$ Normalisiert: $\left(1 + j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$ Amplitude: $G = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : G \approx 0 \frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : G \approx n \cdot 20 \frac{dB}{DK}$ Knick: Bei $\Omega = \frac{T_0}{T} : G = n \cdot 3dB$ Phase: $\varphi = \arctan(\omega T)$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0^\circ$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx n \cdot 90^\circ$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = n \cdot 45^\circ$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>$[dB]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>$[^\circ]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>T_0</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>Ω</td><td>Normierte Frequenz</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	K	Konstante	$[1]$	G	Verstärkung	$[dB]$	φ	Phase	$[^\circ]$	T	Periode	$[s]$	T_0	Periode	$[s]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Ω	Normierte Frequenz	$[1]$
K	Konstante	$[1]$																					
G	Verstärkung	$[dB]$																					
φ	Phase	$[^\circ]$																					
T	Periode	$[s]$																					
T_0	Periode	$[s]$																					
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																					
Ω	Normierte Frequenz	$[1]$																					

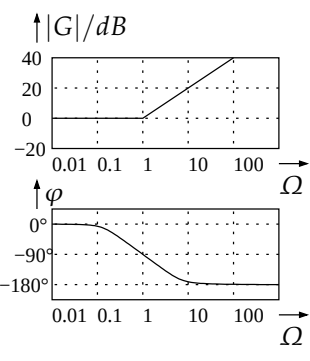
PT₂-Glied: Standardterm $\frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega T)^2}$

Je kleiner ξ ist, desto schneller springt die Phase	Form: $\frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2}$ Normalisiert: $\frac{1}{1 + 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}$ Amplitude: $G = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2\xi T)^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : G \approx 0 \frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : G \approx -40 \frac{dB}{DK}$ Überschwingen, Knick: $\Omega = \frac{T_0}{T} : G = -20 \log_{10}(2\xi)$ Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega 2\xi T}{1 - \omega^2 T^2}\right)$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0^\circ$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx -180^\circ$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = -90^\circ$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>$[dB]$</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>$[^\circ]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>$\frac{1}{T}$</td><td>Resonanzfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>T_0</td><td>Periode</td><td>$[s]$</td></tr> <tr> <td>ξ</td><td>Dämpfung</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$\left[\frac{1}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>Ω</td><td>Normierte Frequenz</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	K	Konstante	$[1]$	G	Verstärkung	$[dB]$	φ	Phase	$[^\circ]$	T	Periode	$[s]$	$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	T_0	Periode	$[s]$	ξ	Dämpfung	$[1]$	ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	Ω	Normierte Frequenz	$[1]$
K	Konstante	$[1]$																											
G	Verstärkung	$[dB]$																											
φ	Phase	$[^\circ]$																											
T	Periode	$[s]$																											
$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																											
T_0	Periode	$[s]$																											
ξ	Dämpfung	$[1]$																											
ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																											
Ω	Normierte Frequenz	$[1]$																											

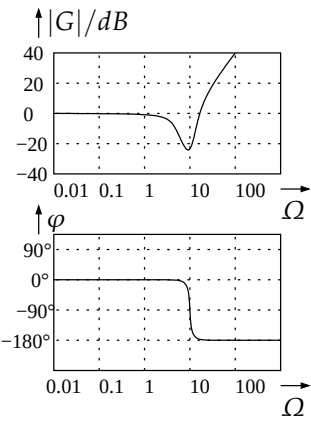
Totzeitglied: Standardterm $e^{-j\omega T_t}$

	Form: $e^{-j\omega T_t}$ Steigung: $0 \frac{dB}{DK}$ $ G = 1$ $\varphi = -\omega T_t$	<table> <tr> <td>T_t</td><td>Totzeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> </table>	T_t	Totzeit	[s]	G	Verstärkung	[dB]	φ	Phase	[°]
T_t	Totzeit	[s]									
G	Verstärkung	[dB]									
φ	Phase	[°]									

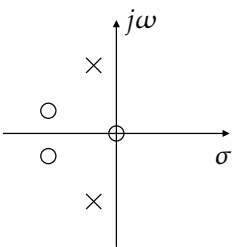
Irregulärer Aufwärtsknick 1. Ordnung: Standardterm $(1 - j\omega T)^n$

	Form: $(1 - j\omega T)^n$ Normalisiert: $\left(1 - j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$ Amplitude: $G = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $G \approx 0 \frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $G \approx n \cdot 20 \frac{dB}{DK}$ Knick: Bei $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $G = n \cdot 3dB$ Phase: $\varphi = -\arctan(\omega T)$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx 0^\circ$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx n \cdot 90^\circ$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $\varphi = n \cdot 45^\circ$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>T_0</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>Ω</td><td>Normierte Frequenz</td><td>[1]</td></tr> </table>	K	Konstante	[1]	G	Verstärkung	[dB]	φ	Phase	[°]	T	Periode	[s]	T_0	Periode	[s]	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	Ω	Normierte Frequenz	[1]
K	Konstante	[1]																					
G	Verstärkung	[dB]																					
φ	Phase	[°]																					
T	Periode	[s]																					
T_0	Periode	[s]																					
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
Ω	Normierte Frequenz	[1]																					

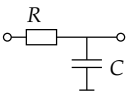
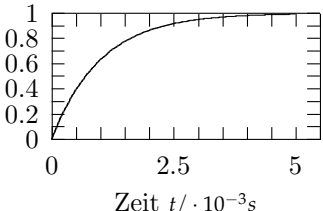
Irregulärer Aufwärtsknick 2. Ordnung: Standardterm $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega T)^2$

 Je kleiner ξ ist, desto schneller springt die Phase	Form: $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2$ Normalisiert: $1 - 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$ Amplitude $ G = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2\xi T)^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $G \approx 0 \frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $G \approx +40 \frac{dB}{DK}$ Überschwingen, Knick: $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $G = -20 \log_{10}(2\xi)$ Phase: $\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega 2\xi T}{1 - \omega^2 T^2}\right)$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx 0^\circ$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx -180^\circ$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $\varphi = -90^\circ$	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>G</td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td>φ</td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>$\frac{1}{T}$</td><td>Resonanzfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr> <td>T_0</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>ξ</td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr> <td>Ω</td><td>Normierte Frequenz</td><td>[1]</td></tr> </table>	K	Konstante	[1]	G	Verstärkung	[dB]	φ	Phase	[°]	T	Periode	[s]	$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	[1/s]	T_0	Periode	[s]	ξ	Dämpfung	[1]	ω	Kreisfrequenz	[1/s]	Ω	Normierte Frequenz	[1]
K	Konstante	[1]																											
G	Verstärkung	[dB]																											
φ	Phase	[°]																											
T	Periode	[s]																											
$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	[1/s]																											
T_0	Periode	[s]																											
ξ	Dämpfung	[1]																											
ω	Kreisfrequenz	[1/s]																											
Ω	Normierte Frequenz	[1]																											

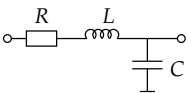
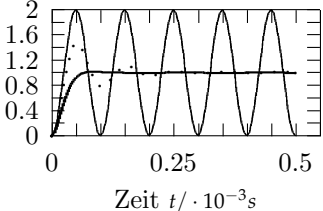
13.9.3 Pol- Nullstellendiagramm

 Ausser K ist die gesamte Netzwerkfunktion aus dem Pol- Nullstellendiagramm ersichtlich.	$s = \sigma + j\omega$ (Frequenzgang: $\sigma=0$) Netzwerkfunktion: $F(s) = K \frac{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}{(s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_n)}$ Nullstellen $\Rightarrow \times$ in Diagramm Polstellen $\Rightarrow \circ$ in Diagramm Pol nahe an $j\omega$-Achse $\Rightarrow$ Überhöhung im Amplitudengang	<table> <tr> <td>K</td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>s</td><td>komplexe Frequenz (Laplace)</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>σ</td><td>$Re(s)$</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr> <td>p</td><td>von Polynom</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>q</td><td>von Polynom</td><td>[1]</td></tr> </table>	K	Konstante	[1]	s	komplexe Frequenz (Laplace)	[1]	σ	$Re(s)$	[1]	ω	Kreisfrequenz	[1/s]	p	von Polynom	[1]	q	von Polynom	[1]
K	Konstante	[1]																		
s	komplexe Frequenz (Laplace)	[1]																		
σ	$Re(s)$	[1]																		
ω	Kreisfrequenz	[1/s]																		
p	von Polynom	[1]																		
q	von Polynom	[1]																		

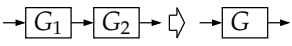
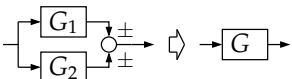
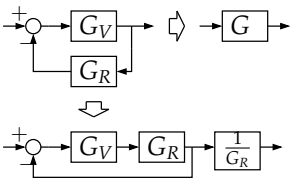
13.10 Eigenschaften des PT₁-Glied

Beispielschaltung  Sprungantwort: 	$G = \frac{1}{1 + j\omega T}$ Beispiel: $T = RC$ Sprungantwort: $u_o = k \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$ $T\dot{u}_o + u_o = ku_{in}$	<table> <tr><td>G</td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr><td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr><td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr><td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr><td>u_o</td><td>u-Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{in}</td><td>u-Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr><td>k</td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> </table>	G	Verstärkung	[dB]	T	Periode	[s]	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	C	Kapazität	[F]	u_o	u-Ausgang	[V]	u_{in}	u-Eingang	[V]	t	Zeit	[s]	k	Faktor	[1]
G	Verstärkung	[dB]																											
T	Periode	[s]																											
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																											
R	Widerstand	$[\Omega]$																											
C	Kapazität	[F]																											
u_o	u-Ausgang	[V]																											
u_{in}	u-Eingang	[V]																											
t	Zeit	[s]																											
k	Faktor	[1]																											

13.11 Eigenschaften des PT₂-Glied

Beispielschaltung  Sprungantwort: $R = 100\Omega$ ——— $R = 30\Omega$ $R = 0\Omega$ ——— 	$G = \frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2}$ Beispiel: $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad T = \sqrt{LC}$ Je kleiner ξ desto mehr schwingt die Schaltung. Bei aktiven Schaltungen kann $\xi < 0$ werden. $\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad 0 < D < 1$ $\omega_0 = \frac{1}{T}$ $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}, \quad D < 0.707$ Sprungantwort: $u_o = k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} x \right]$ $x = \sin \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \arccos(\xi) \right\}$ $T^2 \ddot{u}_o + 2\xi T \dot{u}_o + u_o = ku_{in}$	<table> <tr><td>G</td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr><td>φ</td><td>Phase</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr><td>ξ</td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr><td>ω_e</td><td>Eigenfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr><td>ω_0</td><td>Knickfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr><td>ω_r</td><td>Resonanzfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr><td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr><td>L</td><td>Inuktivität</td><td>[H]</td></tr> <tr><td>C</td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr><td>u_o</td><td>u-Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{in}</td><td>u-Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr><td>k</td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> </table>	G	Verstärkung	[dB]	φ	Phase	[rad]	T	Periode	[s]	ξ	Dämpfung	[1]	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	ω_e	Eigenfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	ω_0	Knickfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	ω_r	Resonanzfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	L	Inuktivität	[H]	C	Kapazität	[F]	u_o	u-Ausgang	[V]	u_{in}	u-Eingang	[V]	t	Zeit	[s]	k	Faktor	[1]
G	Verstärkung	[dB]																																													
φ	Phase	[rad]																																													
T	Periode	[s]																																													
ξ	Dämpfung	[1]																																													
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																													
ω_e	Eigenfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																													
ω_0	Knickfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																													
ω_r	Resonanzfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																													
R	Widerstand	$[\Omega]$																																													
L	Inuktivität	[H]																																													
C	Kapazität	[F]																																													
u_o	u-Ausgang	[V]																																													
u_{in}	u-Eingang	[V]																																													
t	Zeit	[s]																																													
k	Faktor	[1]																																													

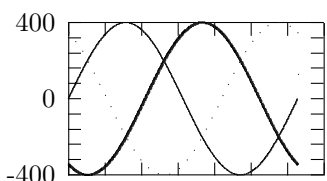
13.12 Verküpfung von Blockdiagrammen

	$G = G_1 \cdot G_2$	G Übertra- gungsfunkti- on [1]
	$G = G_1 \pm G_2$	
	$G = \frac{G_V}{1 + G_V G_R}$ $G = \frac{1}{G_R} \frac{G_V G_R}{1 + G_V G_R}$	

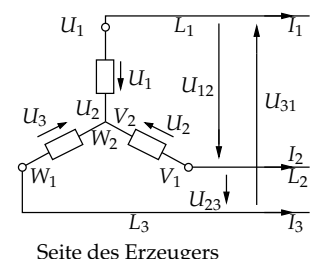
Teil III

Energie und Antriebstechnik

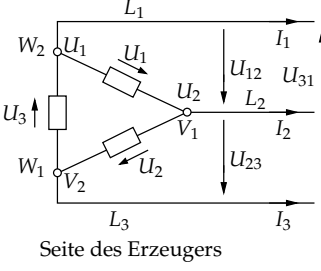
14 Dreiphasensysteme

	Maschensatz: $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$ $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$	$\underline{U}$ Spannung [V] (komplex) $\underline{I}$ Strom (komplex) [A]
---	---	--

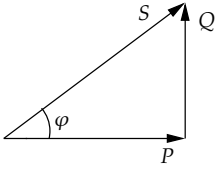
14.1 Sternschaltung

 Seite des Erzeugers	Strang-Sternspannungen: $\underline{U}_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ Aussenleiterspannungen: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \quad \angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120^\circ$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$ $U = U_{Str} \sqrt{3}$ $I = I_{Str}$	$\underline{U}$ Spannung [V] $\underline{U}_{Str}$ Strangspannung [V] $\underline{I}$ Strom [A]
--	---	---

14.2 Dreieckschaltung

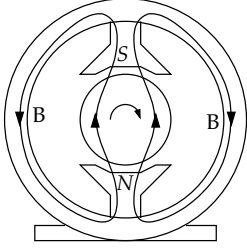
	Strang-Sternspannungen: $U_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $U_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ $U_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{W}_1 - \underline{W}_2$ Aussenleiterspannungen: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 \quad \angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120^\circ$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3$ $U = U_{Str}$ $I = 2I_{Str} \cos(30^\circ) = I_{Str}\sqrt{3}$	<table> <tr> <td>$\underline{U}$</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_{Str}</td><td>Strangspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>$\underline{I}$</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> </table>	$\underline{U}$	Spannung	[V]	U_{Str}	Strangspannung	[V]	$\underline{I}$	Strom	[A]
$\underline{U}$	Spannung	[V]									
U_{Str}	Strangspannung	[V]									
$\underline{I}$	Strom	[A]									

14.2.1 Leistungen bei Stern- und Dreieckschaltung

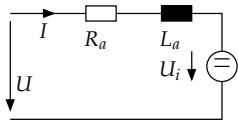
	$S_{Str} = U_{Str} I_{Str}$ $S = 3S_{Str} = \sqrt{3}UI$ $P = S \cos(\varphi) = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)$ $Q = S \sin(\varphi) = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)$ $W = Pt = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)t$ $W_b = Qt = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)t$	<table> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Scheinleistung</td><td>[VA]</td></tr> <tr> <td>P</td><td>Wirkleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>Q</td><td>Blindleistung</td><td>[Var]</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Wirkarbeit</td><td>[Ws]</td></tr> <tr> <td>W_b</td><td>Blindarbeit</td><td>[Vars]</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> </table>	U	Spannung	[V]	I	Strom	[A]	S	Scheinleistung	[VA]	P	Wirkleistung	[W]	Q	Blindleistung	[Var]	W	Wirkarbeit	[Ws]	W_b	Blindarbeit	[Vars]	t	Zeit	[s]
U	Spannung	[V]																								
I	Strom	[A]																								
S	Scheinleistung	[VA]																								
P	Wirkleistung	[W]																								
Q	Blindleistung	[Var]																								
W	Wirkarbeit	[Ws]																								
W_b	Blindarbeit	[Vars]																								
t	Zeit	[s]																								

15 Elektromotoren und Generatoren

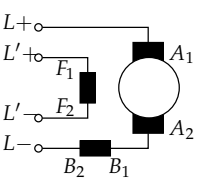
15.1 Allgemein

	$M = Fr$ $F = BIlz\alpha$ $M = BIlz\alpha r = BIC_m$ $C_m = lz\alpha r$ $U_i = Bl\omega z\alpha$ $\omega = 2\pi n$ $U_i \approx \phi n C_n$ $C_n = 2\pi r z \alpha$	<table> <tr> <td>r</td><td>Radius</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>F</td><td>Kraft</td><td>$[N]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Induktion</td><td>$[\frac{Vs}{m}]$</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Leiterlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>z</td><td>Anz. Leiter</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>α</td><td>Polbedeckungswinkel</td><td>$[rad]$</td></tr> <tr> <td>C_m</td><td>Maschinenkonst.</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>magn. Fluss</td><td>$[Wb]$</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Winkelgeschw.</td><td>$[\frac{rad}{s}]$</td></tr> <tr> <td>U_i</td><td>U-Generator / Motor</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Drehzahl</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	r	Radius	$[m]$	F	Kraft	$[N]$	B	Induktion	$[\frac{Vs}{m}]$	I	Strom	$[A]$	l	Leiterlänge	$[m]$	z	Anz. Leiter	$[1]$	α	Polbedeckungswinkel	$[rad]$	C_m	Maschinenkonst.	$[1]$	Φ	magn. Fluss	$[Wb]$	ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	U_i	U-Generator / Motor	$[V]$	n	Drehzahl	$[1]$
r	Radius	$[m]$																																				
F	Kraft	$[N]$																																				
B	Induktion	$[\frac{Vs}{m}]$																																				
I	Strom	$[A]$																																				
l	Leiterlänge	$[m]$																																				
z	Anz. Leiter	$[1]$																																				
α	Polbedeckungswinkel	$[rad]$																																				
C_m	Maschinenkonst.	$[1]$																																				
Φ	magn. Fluss	$[Wb]$																																				
ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$																																				
U_i	U-Generator / Motor	$[V]$																																				
n	Drehzahl	$[1]$																																				

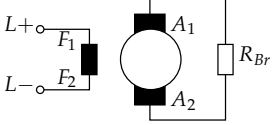
15.2 Gleichstrommaschine

 Ersatzschaltbild Ankerkreis	Falls $U > U_i \rightarrow$ Motorbetrieb, sonst Genratorbetrieb $U_i = k_1 \Phi n$ $U = U_i + R_A I L_a \frac{dI}{dt}$ $I = \frac{U - U_i}{R_A} (\text{stationär})$ $n_0 = \frac{U}{k_1 \Phi}$ $P_{el} = U_i I \pm \overset{Mot}{Gen} (I^2 R_A)$ $M = \frac{k_1}{2\pi} \Phi I = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M = k_2 \Phi I$ $n = \underbrace{\frac{U}{k_1 \Phi}}_{\text{Leerlaufterm}} - \underbrace{\frac{R_A M}{k_1 k_2 \Phi^2}}_{\text{Lastterm}}$ $M_A = \frac{k_2 \Phi U}{R_A}$	<table> <tr> <td>U_i</td><td>Ankerspannung induziert</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Ankerspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>n</td><td>Drehzahl</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>n_0</td><td>n-Leerlauf</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>P</td><td>Leistung</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>R_A</td><td>R-Anker</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>L_a</td><td>L-Anker</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>magn. Fluss</td><td>[Wb]</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>M_A</td><td>M-Anlauf</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>k_1</td><td>Maschinenkonst.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>k_2</td><td>Maschinenkonst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	U_i	Ankerspannung induziert	[V]	U	Ankerspannung	[V]	I	Strom	[A]	n	Drehzahl	[1]	n_0	n-Leerlauf	[1]	P	Leistung	[W]	R_A	R-Anker	[Ω]	L_a	L-Anker	[Ω]	Φ	magn. Fluss	[Wb]	M	Drehmoment	[Nm]	M_A	M-Anlauf	[Nm]	k_1	Maschinenkonst.	[1]	k_2	Maschinenkonst.	[1]
U_i	Ankerspannung induziert	[V]																																							
U	Ankerspannung	[V]																																							
I	Strom	[A]																																							
n	Drehzahl	[1]																																							
n_0	n-Leerlauf	[1]																																							
P	Leistung	[W]																																							
R_A	R-Anker	[Ω]																																							
L_a	L-Anker	[Ω]																																							
Φ	magn. Fluss	[Wb]																																							
M	Drehmoment	[Nm]																																							
M_A	M-Anlauf	[Nm]																																							
k_1	Maschinenkonst.	[1]																																							
k_2	Maschinenkonst.	[1]																																							

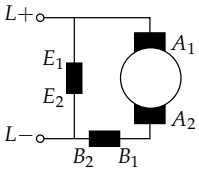
15.2.1 Fremderregte Gleichstrommaschine (GNSM)

	$M = \frac{k_2 \Phi U}{R_A} - \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A}$ Drehzahlsteuerung: 1. Änderung des Erregerfeldes 2. Änderung der Ankerspannung 3. Vergrößerung des Ankerwiderstandes	<table> <tr> <td>U</td><td>Ankerspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_A</td><td>R-Anker</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>magn. Fluss</td><td>[Wb]</td></tr> <tr> <td>k_1</td><td>Maschinenkonst.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>k_2</td><td>Maschinenkonst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	U	Ankerspannung	[V]	R_A	R-Anker	[Ω]	M	Drehmoment	[Nm]	Φ	magn. Fluss	[Wb]	k_1	Maschinenkonst.	[1]	k_2	Maschinenkonst.	[1]
U	Ankerspannung	[V]																		
R_A	R-Anker	[Ω]																		
M	Drehmoment	[Nm]																		
Φ	magn. Fluss	[Wb]																		
k_1	Maschinenkonst.	[1]																		
k_2	Maschinenkonst.	[1]																		

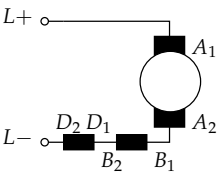
15.2.2 Nutzbremmung mit fremderregter Gleichstrommaschine

	$n = \frac{(R_A + R_{Br})M_{Br}}{k_1 k_2 \Phi^2}$ $M = \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A + R_{Br}}$	<table> <tr> <td>n</td><td>Drehzahl</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_A</td><td>R-Anker</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_{Br}</td><td>R-Brems</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>magn. Fluss</td><td>[Wb]</td></tr> <tr> <td>k_1</td><td>Maschinen- konst.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>k_2</td><td>Maschinen- konst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	n	Drehzahl	[1]	R_A	R-Anker	[Ω]	R_{Br}	R-Brems	[Ω]	M	Drehmoment	[Nm]	Φ	magn. Fluss	[Wb]	k_1	Maschinen- konst.	[1]	k_2	Maschinen- konst.	[1]
n	Drehzahl	[1]																					
R_A	R-Anker	[Ω]																					
R_{Br}	R-Brems	[Ω]																					
M	Drehmoment	[Nm]																					
Φ	magn. Fluss	[Wb]																					
k_1	Maschinen- konst.	[1]																					
k_2	Maschinen- konst.	[1]																					

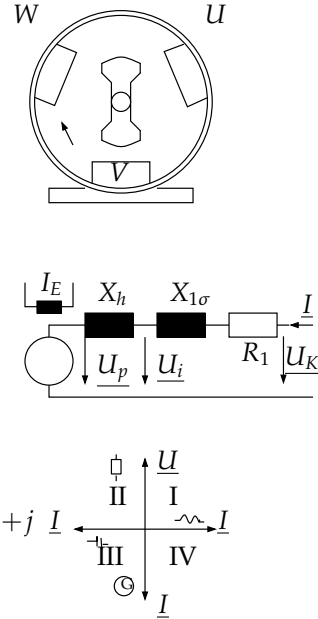
15.3 Gleichstrom Nebenschlussmaschine (GNSM)

	Es gelten die selben Regeln wie bei der fremderregten Gleichstrommaschine, jedoch kann die Drehzahl nicht durch erniedrigen der Spannung gesenkt werden. Bei Widerstandsbremmung ist nur der Anker an R_{Br} anzuschliessen.	
--	---	--

15.4 Gleichstrom Reihenschlussmaschine (GRSM)

	$\sum R_A = R_A + R_B + R_D$ $U_i = k_1 c * I n = k_3 I n$ $M = I^2 \frac{k_3}{2\pi} = I^2 k_4$ $n = \frac{U}{\sqrt{2\pi k_3 M}} - \frac{\sum R_A}{k_3}$ $M = \frac{k_3}{2\pi} \left(\frac{U}{k_3 n + \sum R_A} \right)^2$ $M_A = \frac{k_3}{2\pi} \left(\frac{U}{\sum R_A} \right)^2$ Die Änderung der Drehzahl ist wie bei GNSM	<table> <tr> <td>n</td><td>Drehzahl</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_A</td><td>R-Anker</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_B</td><td>R-Wendepolwicklung</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_D</td><td>R-Reihenschlusswicklung</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>U_i</td><td>Ankerspannung induziert</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>M</td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>M_A</td><td>M-Anlauf</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Maschinenkonst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	n	Drehzahl	[1]	R_A	R-Anker	[Ω]	R_B	R-Wendepolwicklung	[Ω]	R_D	R-Reihenschlusswicklung	[Ω]	U_i	Ankerspannung induziert	[V]	U	Spannung	[V]	M	Drehmoment	[Nm]	M_A	M-Anlauf	[Nm]	k	Maschinenkonst.	[1]
n	Drehzahl	[1]																											
R_A	R-Anker	[Ω]																											
R_B	R-Wendepolwicklung	[Ω]																											
R_D	R-Reihenschlusswicklung	[Ω]																											
U_i	Ankerspannung induziert	[V]																											
U	Spannung	[V]																											
M	Drehmoment	[Nm]																											
M_A	M-Anlauf	[Nm]																											
k	Maschinenkonst.	[1]																											

15.5 Drehstrom Synchrongenerator (DSG)

 I, IV: Motorbetrieb II, III: Generatorbetrieb I, II: Abgabe induktive Blindleistung = Übererregt III, IV: Aufnahme kapazitive Blindleistung = Untererregt	$n_{syn} = \frac{60f}{p}$ $U_i = z \frac{d\Phi}{dt}$ $ U_i = Blv_R z$ $I_w = I \cos(\varphi) \quad I_b = I \sin(\varphi)$ $I^2 = I_w^2 + I_b^2$ $\underline{I} = I_w + jI_b = \frac{j}{X_d}(\underline{U}_p - \underline{U}_{KL})$ $\underline{U}_{KL} = \underline{U}_p + jX_d \underline{I}$ $X_d = X_H + X_\sigma$ Leerlauf: $\frac{I_E}{I_{E0N}} = \frac{U_p \sqrt{3}}{U_N}$ Kurzschluss: $X_d = \frac{U_p}{I_{K0}}$ $x_d = X_d \frac{I_N \sqrt{3}}{U_N} = X_d \frac{I_N}{U_{KL}} = \frac{1}{k_0}$	<table> <tr> <td>n_{syn}</td><td>Drehzahl</td><td>$\left[\frac{1}{min}\right]$</td></tr> <tr> <td>$f$</td><td>(Netz-) Frequenz</td><td>$[Hz]$</td></tr> <tr> <td>p</td><td>Polpaarzahl</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>U_i</td><td>Span. induziert</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_{KL}</td><td>Span. Klemmen</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>l</td><td>Leiterlänge</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>z</td><td>Anz. Windungen</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>v_R</td><td>Luftspaltgeschw.</td><td>$\left[\frac{m}{s}\right]$</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Induktion</td><td>$\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\Phi$</td><td>magn. Fluss</td><td>$[Wb]$</td></tr> <tr> <td>I_w</td><td>Wirkstrom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>I_b</td><td>Blindstrom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>X_d</td><td>synch.Reakt</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>x_d</td><td>relative synch.Reakt</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>I_E</td><td>Erregerstrom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>U_N</td><td>U-Nenn verkettet</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>k_0</td><td>Leerlauf-Kurzschluss Verhältnis</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	n_{syn}	Drehzahl	$\left[\frac{1}{min}\right]$	f	(Netz-) Frequenz	$[Hz]$	p	Polpaarzahl	$[1]$	U_i	Span. induziert	$[V]$	U_{KL}	Span. Klemmen	$[V]$	l	Leiterlänge	$[m]$	z	Anz. Windungen	$[1]$	v_R	Luftspaltgeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	B	Induktion	$\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$	Φ	magn. Fluss	$[Wb]$	I_w	Wirkstrom	$[A]$	I_b	Blindstrom	$[A]$	X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$	x_d	relative synch.Reakt	$[\Omega]$	I_E	Erregerstrom	$[A]$	U_N	U-Nenn verkettet	$[V]$	k_0	Leerlauf-Kurzschluss Verhältnis	$[1]$
n_{syn}	Drehzahl	$\left[\frac{1}{min}\right]$																																																			
f	(Netz-) Frequenz	$[Hz]$																																																			
p	Polpaarzahl	$[1]$																																																			
U_i	Span. induziert	$[V]$																																																			
U_{KL}	Span. Klemmen	$[V]$																																																			
l	Leiterlänge	$[m]$																																																			
z	Anz. Windungen	$[1]$																																																			
v_R	Luftspaltgeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																																			
B	Induktion	$\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$																																																			
Φ	magn. Fluss	$[Wb]$																																																			
I_w	Wirkstrom	$[A]$																																																			
I_b	Blindstrom	$[A]$																																																			
X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$																																																			
x_d	relative synch.Reakt	$[\Omega]$																																																			
I_E	Erregerstrom	$[A]$																																																			
U_N	U-Nenn verkettet	$[V]$																																																			
k_0	Leerlauf-Kurzschluss Verhältnis	$[1]$																																																			

15.6 DSG im Inselbetrieb

	$\underline{U}_p = \underline{U}_{KL} - jX_d \underline{I}$	<table> <tr> <td>U_p</td><td>Span. Polrad</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_{KL}</td><td>Span. Klemmen</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>X_d</td><td>synch.Reakt</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	U_p	Span. Polrad	$[V]$	U_{KL}	Span. Klemmen	$[V]$	X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$
U_p	Span. Polrad	$[V]$									
U_{KL}	Span. Klemmen	$[V]$									
X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$									

15.7 Belastung des DSG am starren Netz

$U_p = \sqrt{\frac{U_{Netz}^2}{3} + X_d^2 I^2 + 2 \frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} X_d I \sin(\varphi)}$ falls $U_N = U_{Netz}$: $\frac{U_p \sqrt{3}}{U_N} = \sqrt{1 + x_d^2 \left(\frac{I}{I_N}\right)^2 + 2 x_d \frac{I}{I_N} \sin(\varphi)}$	U_{Netz} Netzspannung [V] U_{Kl} Span. Klemmen [V] U_p Span. Polrad [V] U_N U-Nenn verkettet [V] X_d synch.Reakt [Ω] x_d rel. synch.Reakt [Ω] I Laststrom [A] φ Phase [rad]
---	--

15.8 Drehmoment und Stabilität des DSG am starren Netz

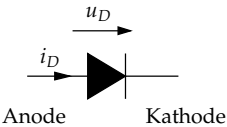
$P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} I \cos(\varphi)$ $P_{el} = 3 U_{Str} I_{Str} \cos(\varphi)$ $U_p \sin(\vartheta) = I X_d \cos(\varphi)$ $P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M_{mech} = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{P_{el}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M = c_i x l$ $c_i = \frac{3}{X_d 2\pi n}$ $x = I X_d$ $I = \frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} \cos(\varphi)$	U_{Netz} Netzspannung [V] U_{Str} Strangspan. [V] U_p Span. Polrad [V] P_{el} El-Wirkleistung [W] M_{el} Generatormoment [Nm] n Drehzahl [$\frac{1}{min}$] X_d synch.Reakt [Ω] I Laststrom [A] φ Phase [rad] ϑ Lastwinkel [rad]
---	---

Teil IV

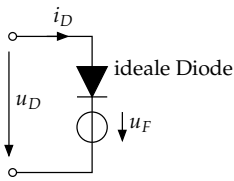
Elektronik

16 Diode

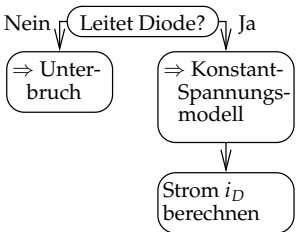
16.1 Ideale Diode

 Anode Kathode	Sperrbereich (SB) : $i_D = 0, u_D < 0$ Durchlassbereich (DB): $i_D \geq 0, u_D = 0$	u_D Spannungs [V] über Diode i_D Strom durch [A] Diode
---	---	--

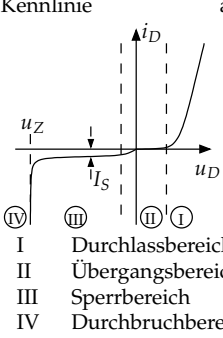
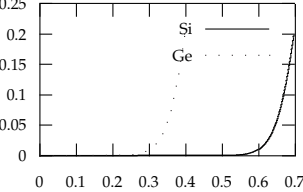
16.2 Konstantspannungsmodell

 ideale Diode	$u_{FSiDiode} = 0.6$ $u_{FGermaniumDiode} = 0.3$ $u_{FShottkyDiode} = 0.1$ $u_{FLEDrot} = 1.6$	u_F Forwärts- [V] Spannungs
---	--	--

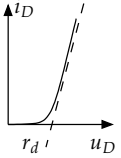
16.3 Arbeitspunktberechnung

	Teilweise ist es nur durch ausprobieren möglich zu sagen, ob die Diode leitet oder sperrt.	i_D Strom durch [A] Diode
---	---	--

16.4 Kennlinie

Kennlinie allgemein:  Kennlinie Ge- und Si-Diode: 	allgemein: $i_D = I_S(e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1)$ $i_D = I_S(e^{\frac{u_D - r_b i_D}{m U_T}} - 1)$ $U_T = \frac{kT}{e} = 8.6 \cdot 10^{-5} \cdot T$ $U_T(300K) = 26mV$, $U_T(348K) = 30mV$, $U_T(393K) = 34mV$ Für normale Si-Diode gilt: $I_S = 10^{-12}A$, $r_b = 0.1\Omega$, $m = 1$ Die vier Bereiche der Kennlinie: I: $-0.1V < u_D < 0.1V$ $\Rightarrow$ Diodengleichung exakt verwenden II: $u_D > 0.1V$ $\Rightarrow$ Diodengleichung wird: $i_D = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}}$ Verhältnis zweier Spannungen: $\frac{i_{D2}}{i_{D1}} = e^{\frac{u_{D2} - u_{D1}}{U_T}} \rightarrow u_{D2} - u_{D1} = U_T \ln \frac{i_{D2}}{i_{D1}}$ III: $u_D < -0.1V$ $i_D = -I_S$ oder $i_D = I_S$ IV: Siehe Zehner-Diode	i_D Strom durch Diode [A] u_D Spannung über Diode [V] U_T Temperaturspannung [V] T Temperatur [K] I_S Sättigungsstrom [A] I_R Sperrstrom [A] r_b Bahnwiderstand [Ω] m Korrekturfakt. [1] k Boltzmannkonst. [$\frac{Ws}{K}$] $= 1.38 \cdot 10^{-23}$ e Elementarladung [As] $= 1.602 \cdot 10^{-19}$
--	--	--

16.4.1 Differentieller Widerstand

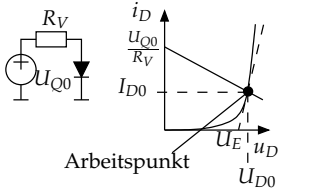
 Für kleine Signale wird die Kennlinie der Diode durch eine Tangente ($= r_d$) approximiert.	$r_d = \frac{du_D}{di_D} = \frac{1}{g_d} \approx \frac{U_T}{I_{D0}}$ Falls $m = 1$ und $r_b = 0$ gilt: $g_d = \frac{di_D}{du_D} = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \frac{1}{U_T} = \frac{i_D}{U_T}$	r_d Differentieller Widerstand [Ω] d_d Differentieller Leitwert [S] i_D Strom durch Diode [A] u_D Spannung über Diode [V] U_T Temperaturspannung [V] m Korrekturfakt. [1] I_{D0} DC-Strom im Arbeitspunkt [A]
---	---	---

16.5 DC- und AC-Analyse von Diodenschaltungen

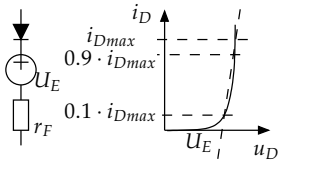
16.5.1 Vorgehen

1. Schaltung aufteilen in AC- und DC-Ersatzschltbild
2. In DC-Ersatzschaltung den Arbeitspunkt bestimmen (Konstantspannungsmodell)
3. Berechnen der dynamischen Widerstände im Arbeitspunkt (approximieren der Diodenkennlinie)
4. Kleinsignalanalyse (Lineare Netzwerktheorie)
5. Gesamtlösung setzt sich aus Arbeitspunkt und Wechselstromlösung zusammen

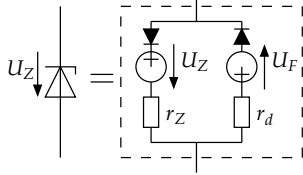
16.5.2 Kleinsignalanalyse

 Arbeitspunktbestimmung	DC-Ersatzschaltung: Konstantspannungsmodell (siehe S. 129) AC-Ersatzschaltung: Differentieller Widerstand (siehe S. 130) Resultierendes Gleichungssystem: $\begin{cases} i_D = \frac{U_{Q0} - u_D}{R_V} \\ i_D = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \end{cases}$ $i_D = 0 \quad u_D \leq U_E$ $i_D = \frac{1}{r_D(u_D - U_E)} \quad u_D > U_E$ $U_E = U_{D0} - I_{D0} r_d$	<table> <tr><td>U_F</td><td>Flussspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>R_V</td><td>Vorwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>U_{Q0}</td><td>Quellspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>I_{D0}</td><td>Arbeitsstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>U_{D0}</td><td>Arbeitspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>U_T</td><td>Temperaturspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_D</td><td>Spannung über Diode</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>i_D</td><td>Strom durch Diode</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>I_S</td><td>Sättigungsstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>U_E</td><td>Gleichspan.</td><td>[V]</td></tr> </table>	U_F	Flussspan.	[V]	R_V	Vorwiderstand	[Ω]	U_{Q0}	Quellspan.	[V]	I_{D0}	Arbeitsstrom	[A]	U_{D0}	Arbeitspan.	[V]	U_T	Temperaturspannung	[V]	u_D	Spannung über Diode	[V]	i_D	Strom durch Diode	[A]	I_S	Sättigungsstrom	[A]	U_E	Gleichspan.	[V]
U_F	Flussspan.	[V]																														
R_V	Vorwiderstand	[Ω]																														
U_{Q0}	Quellspan.	[V]																														
I_{D0}	Arbeitsstrom	[A]																														
U_{D0}	Arbeitspan.	[V]																														
U_T	Temperaturspannung	[V]																														
u_D	Spannung über Diode	[V]																														
i_D	Strom durch Diode	[A]																														
I_S	Sättigungsstrom	[A]																														
U_E	Gleichspan.	[V]																														

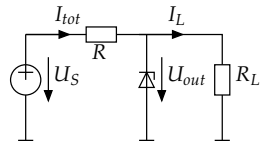
16.5.3 Grosssignalanalyse

 Für Grosssignalanalyse wird die Kennlinie durch eine Gerade durch die Punkte $0.1 i_{Dmax}$ und $0.9 i_{Dmax}$ approximiert.	$U_E = u_D(0.1 I_{Dmax}) - 0.1 I_{Dmax} r_F$ $r_F = \frac{\Delta u_D}{0.8 I_{Dmax}}$	<table> <tr><td>u_D</td><td>Spannung über Diode</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>i_D</td><td>Strom durch Diode</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>r_F</td><td>Diodenwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_D	Spannung über Diode	[V]	i_D	Strom durch Diode	[A]	r_F	Diodenwiderstand	[Ω]
u_D	Spannung über Diode	[V]									
i_D	Strom durch Diode	[A]									
r_F	Diodenwiderstand	[Ω]									

16.6 Z-Dioden

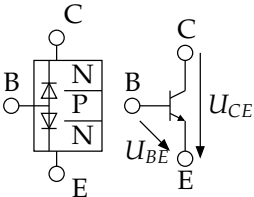
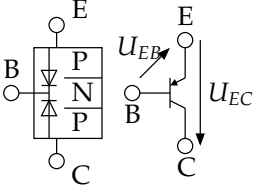
	$r_Z = \frac{du_Z}{di_Z}$ Temperaturkoeffizient: $\alpha = \frac{\frac{dU_Z}{dT}}{U_Z}$ $\alpha < 0$ bei $U_Z < 5.6V$ $\alpha \approx 0$ bei $U_Z \approx 5.6V$ $\alpha > 0$ bei $U_Z > 5.6V$ Temperaturkompensation durch Serieschaltung: $\alpha_1 U_{Z1} = -\alpha_2 U_{Z2}$	<table> <tr> <td>r_Z</td><td>Z-Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_d</td><td>Differentieller Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>U_Z</td><td>Zehnersp.</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_F</td><td>Flusssp.</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temperatur</td><td>$[K]$</td></tr> </table>	r_Z	Z-Widerstand	$[\Omega]$	r_d	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$	U_Z	Zehnersp.	$[V]$	U_F	Flusssp.	$[V]$	T	Temperatur	$[K]$
r_Z	Z-Widerstand	$[\Omega]$															
r_d	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$															
U_Z	Zehnersp.	$[V]$															
U_F	Flusssp.	$[V]$															
T	Temperatur	$[K]$															

16.6.1 Z-Dioden zur Spannungsstabilisierung

	$I_{totmin} = \frac{U_{Smin} - U_{outmin}}{R}$ $I_{totmax} = \frac{U_{Smax} - U_{outmin}}{R}$ $I_{outmin} = I_{totmin} - I_{Lmax}$ $I_{outmax} = I_{totmax} - I_{Lmin}$ $P_{Zmax} = U_{outnom} I_{outmax}$ Rippelunterdrückung: $u_{out} = u_S \frac{r_Z \parallel R_L}{R + (r_Z \parallel R_L)}$	<table> <tr> <td>I_{tot}</td><td>I-Eingang</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>U_S</td><td>Speisesp.</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I_L</td><td>Laststrom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>U_{out}</td><td>Ausgangssp.</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Vorwiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>R_L</td><td>Lastwiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>P_Z</td><td>P-Verslust</td><td>$[W]$</td></tr> <tr> <td>r_Z</td><td>Differentieller Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>u_S</td><td>Rippel Eingang</td><td>am $[V]$</td></tr> <tr> <td>u_{out}</td><td>Rippel Ausgang</td><td>am $[V]$</td></tr> </table>	I_{tot}	I-Eingang	$[A]$	U_S	Speisesp.	$[V]$	I_L	Laststrom	$[A]$	U_{out}	Ausgangssp.	$[V]$	R	Vorwiderstand	$[\Omega]$	R_L	Lastwiderstand	$[\Omega]$	P_Z	P-Verslust	$[W]$	r_Z	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$	u_S	Rippel Eingang	am $[V]$	u_{out}	Rippel Ausgang	am $[V]$
I_{tot}	I-Eingang	$[A]$																														
U_S	Speisesp.	$[V]$																														
I_L	Laststrom	$[A]$																														
U_{out}	Ausgangssp.	$[V]$																														
R	Vorwiderstand	$[\Omega]$																														
R_L	Lastwiderstand	$[\Omega]$																														
P_Z	P-Verslust	$[W]$																														
r_Z	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$																														
u_S	Rippel Eingang	am $[V]$																														
u_{out}	Rippel Ausgang	am $[V]$																														

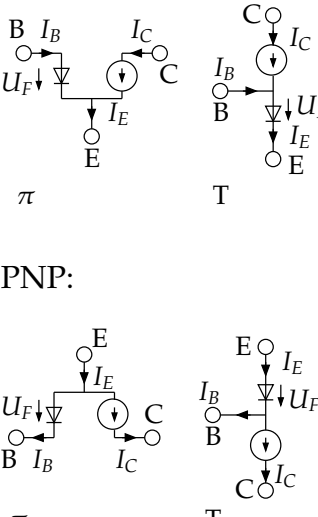
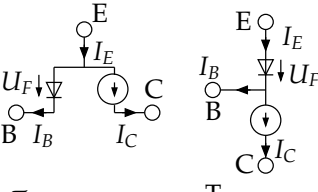
17 Bipolar Transistor

17.1 NPN- und PNP-Transistor

NPN:  PNP: 	$i_E = i_C + i_B$ $i_C = A i_E$ $B = \frac{A}{1 - A} = \frac{i_C}{i_B}$ DC-Ersatzschaltung: $i_B = I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$ $i_C = B I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$	A Stromverstärkung in B-Schaltung [1] $= 0.9 \dots 0.998$ B Stromverstärkung [1] i_B Basisstrom [A] i_C Kollektorstrom [A] i_E Emitterstrom [A] u_{BE} Span. B $\rightarrow$ E [V] u_T Temp.-Span. Diode B $\rightarrow$ E [V] ≈ 0.026 i_{SB} Stromquelle [A] zw. C $\rightarrow$ B
---	--	---

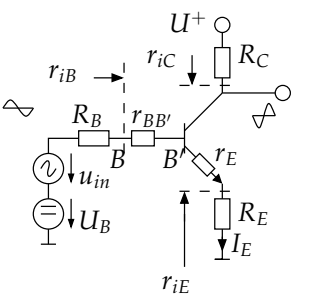
17.2 Der ideale Transistor bei Gleichspannung

17.2.1 DC-Ersatzschaltung

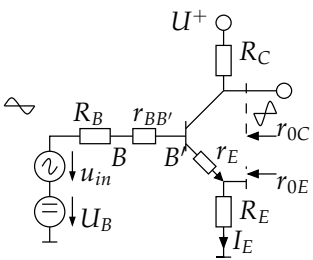
NPN:  PNP: 	$B = \frac{I_C}{I_B}$ $I_C = B I_B$ $I_E = I_B + I_C = I_B + B I_B$ $I_E = (1 + B) I_B$ falls $B \gg 1$ gilt: $I_C \approx I_E \approx B I_B$ $A = \frac{I_C}{I_E} = \frac{B I_B}{(1 + B) I_B} = \frac{B}{1 + B}$	A Stromverstärkung in B-Schaltung [1] ≈ 1 falls $B \gg 1$ B DC-Stromverstärkung [1] I_B Basisstrom [A] I_C Kollektorstrom [A] I_E Emitterstrom [A] U_F Span. Diode [V] ≈ 0.6
---	---	---

17.3 Verstärkerschaltungen

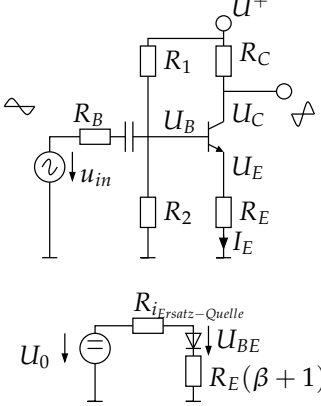
17.3.1 Dynamische Innenwiderstände des Transistors

	$r_{iB} = r_{BB'} + (\beta + 1)(R_E + r_E)$ $r_{iE} = r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{iC} = r_{CE} \left(1 + \frac{\beta R_E}{R_E + R_B + r_{BB'} + r_{B'E}} \right)$ $r_{iC} \approx R_C$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1} = \frac{\frac{U_{temp}}{I_B}}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$	r_{iB} r-Basis [Ω] r_{iE} r-Emitter [Ω] r_{iC} r-Kollektor [Ω] $r_{BB'}$ Basisbahnwiderstand [Ω] r_E innerer r-Emitter [Ω] R_E R-Emitter [Ω] β AC-Stromverstärkung [1] R_B R-Basis [Ω] I_C Kollektorstrom [A] I_E Emitterstrom [A] U_{Early} Early-Span. = [V] 20...400, typ. 100 U_{temp} Temp-Span. [V] ≈ 0.026
---	---	--

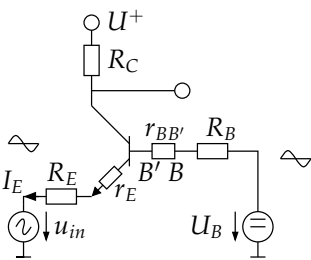
17.3.2 Emitterschaltug

invertierend: 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = - \frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$ $A \approx - \frac{R_C}{R_E + r'_E}$ Falls $R_E = 0$: $A = \frac{R_C \parallel r_{CE}}{r'_E}$ $\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$ $r_{0C} \approx R_C \quad r_{0E} = r_{iE} \parallel R_E \quad r_{0B} = r_{iB} \parallel R_1 \parallel R_2$	A Verstärkung [1] μ max. theoretisch A [1] β AC-Stromverstärkung [1] R_C R-Kollektor [Ω] R_E R-Emitter [Ω] R_B R-Basis [Ω] $r_{BB'}$ Basisbahnwiderstand [Ω] r_E innerer Emitter r- [Ω] I_C I-Kollektor [A] I_E Emitterstrom [A] U_{Early} Early-Span. = 20...400, typ. 100 [V] U_{temp} Temp-Span. ≈ 0.026 [V]
--	--	--

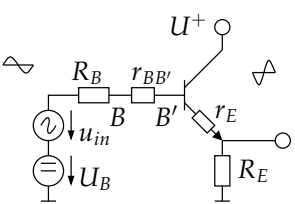
Arbeitspunktberechnung

	$U_{0_{Ersatz-Quelle}} = U_0 = \frac{U^+}{R_1 + R_2} R_2$ $R_{i_{Ersatz-Quelle}} = R_1 \parallel R_2$ $U_{RE} = \frac{(U_0 - U_{BE})(\beta + 1)R_E}{(R_1 \parallel R_2) + (\beta + 1)R_E}$ Falls $I_B = 0$: $U_{RE} = U_0 - U_{BE}$ $I_B = \frac{(U_0 - U_{BE} - U_{RE})}{R_1 \parallel R_2}$ $I_C = I_E - I_B$ $U_{RE} = I_C R_C \rightarrow U_C$	β AC-Stromverstärkung [1] R_C R-Kollektor [Ω] R_E R-Emitter [Ω] I_C I-Kollektor [A] I_E Emitterstrom [A] U^+ Speise-Span. [V] U_{BE} B-E-Span. ≈ 0.6 [V] U_0 Span. der gedachten Quelle des Basisspannungsteilers [V] R_i R-Innen [Ω]
---	---	--

17.3.3 Basisschaltung

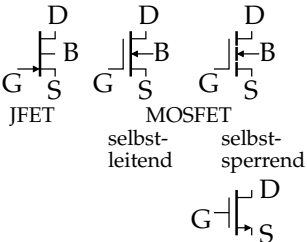
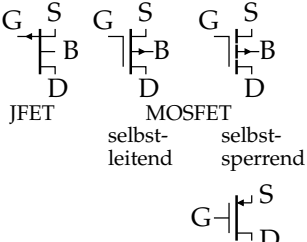
nicht invertierend: 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$ $A \approx \frac{R_C}{R_E + r'_E}$ Falls $R_E = 0$: $A = \frac{R_C \parallel r_{CE}}{r'_E}$ $\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$ $r_{0C} \approx R_C \quad r_{0E} = r_{iE} \parallel R_E \quad r_{0B} = r_{iB} \parallel R_1 \parallel R_2$	A Verstärkung [1] μ max. theoretisch A [1] β AC-Stromverstärkung [1] R_C R-Kollektor [Ω] R_E R-Emitter [Ω] R_B R-Basis [Ω] $r_{BB'}$ Basisbahnwiderstand [Ω] r_E innerer r-Emitter [Ω] I_C I-Kollektor [A] I_E Emitterstrom [A] U_{Early} Early-Span. = 20...400, typ. 100 [V] U_{temp} Temp-Span. ≈ 0.026 [V]
--	--	---

17.3.4 Kollektorschaltung (Emitterfolger)

nicht invertierend: 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_E}{R_E + r'_E}$ Falls $R_E \gg r'_E$ gilt : $A \approx 1$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$	A Verstärkung [1] R_E R-Emitter [Ω] R_B R-Basis [Ω] r_E innerer r-Emitter [Ω] $r_{BB'}$ Basisbahnwiderstand [Ω] β AC-Stromverstärkung [1]
--	--	---

18 Feldeffekt Transistor

18.1 Verschiedene Typen

n-Kanal:  p-Kanal: 	JFET: Die Isoltion zwischen Kanal und Gate besteht aus einer pn-Sperrschicht (Diode). MOSFET: Die Isoltion zwischen Kanal und Gate besteht aus einer SiO_2-Schicht. Der selbstsperrende MOSFET sowie der JFET werden mit der Gatespannung gesperrt. Bulk ist meistens mit Source verbunden.	G Gate D Drain B Bulk oder Substrat S Source
---	--	--

18.2 Der ideale MOSFET (Handrechnung)

Im gesättigten Bereich verhält sich ein FET annähernd wie eine Stromquelle, im ungesättigten Bereich stellt er einen Widerstand dar. Die Steuergrösse ist u_{GS}.	$U_{DSsat} = U_{GS} - U_T$ $I_{DSat} = K \frac{U_{DS}^2}{2}$ $I_D = I'_D \frac{W}{L}$ $K = \frac{2I_{DSS}^*}{U_T^2}$ $K = K' \frac{W}{L} \quad K' = \mu C_{ox}$ $k' \approx K' \quad C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}}$ $U_A \approx aL$ Im ohmschen Bereich gilt: $U_{DS} < U_{DSsat}$ $I_D = K \left[(U_{GS} - U_T) U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right]$ $r_{DS} = \frac{dV_{DS}}{dI_D} = \frac{ U_A + U_{DS}}{I_D}$ Im gesättigten Bereich gilt: $U_{DS} > U_{DSsat}$ $I_D = \frac{k}{2} (U_{GS} - U_T)^2$ Nur bei n-Kanal: $U_T > 0$ $U_{GS} > U_T \Rightarrow I_D > 0$ Nur bei p-Kanal: $U_T < 0$ $U_{GS} < U_T \Rightarrow I_D > 0$	I_D Drainstrom [A] U_T Schwellspannung (0.6...8) [V] K Transkonduktanzparameter $\left[\frac{A}{V^2}\right]$ k' spez. k ($k'_N \approx 44 \cdot 10^{-6}$, $k'_p \approx 17 \cdot 10^{-6}$) $\left[\frac{A}{V^2}\right]$ k wie K jedoch gesättigt $\left[\frac{A}{V^2}\right]$ U_{DS} DS-Spannung [V] U_{GS} GS-Spannung [V] I_{DSS}^* ev. anstelle von K [A] W Kanalbreite [m] L Kanallänge [m] C_{ox} spez. Kapazität Kanal-Gate $\left[\frac{F}{m^2}\right]$ ϵ_{ox} Dielektrizitätskonst. $\left[\frac{F}{m}\right]$ ($SiO_2 = 3.9 \cdot 8.86 \cdot 10^{-3}$) t_{ox} Dicke Isolation Kanal-Gate [m] μ Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$, $\mu_n = 230$) $\left[\frac{cm^2}{sV}\right]$ r_{DS} dyn. Drain-Source Widerstand $[\Omega]$ U_A Earlyspannung [V] L Gatelänge [m] a Early Faktor $\left[\frac{V}{\mu m}\right]$ ≈ 6
---	---	--

18.3 Der reale MOSFET

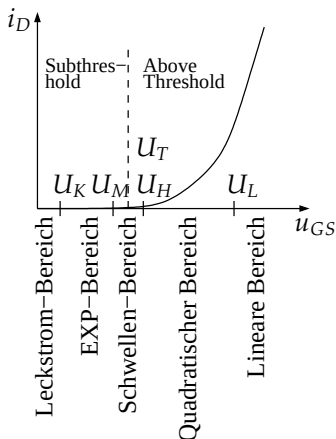
Im Exp-Bereich, bei schwacher Inversion:

$$0 < U_{GS} < (U_T - 60mV)$$

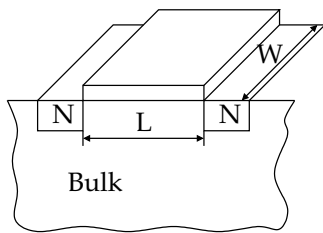
Im Quad-Bereich, bei starker Inversion:

$$U_{GS} > (U_T - 60mV)$$

Dazwischen: Moderate Inversion



Im Leckstrombereich, im Schwellenbereich und im linearen Bereich existieren keine handlichen Formeln.



Im EXP-Bereich gilt:

$$U_{DSsat} \approx 5U_{temp} \approx 130mV$$

ungesättigt: $U_{DS} \leq U_{DSsat}$

$$I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}} \left(1 - e^{-\frac{U_{DS}}{U_{temp}}}\right) (1 + \lambda U_{DS})$$

gesättigt: $U_{DS} \geq U_{DSsat}$

$$I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}} (1 + \lambda U_{DS})$$

Im Quadratischen Bereich gilt:

$$U_{DSsat} = U_{GS} - U_T = \sqrt{2 \frac{I_D}{k}}$$

ungesättigt: $U_{DS} \leq U_{DSsat}$

$$I_D = K \left[(U_{GS} - U_T) U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right] (1 + \lambda U_{DS})$$

gesättigt: $U_{DS} \geq U_{DSsat}$

$$I_D = \frac{k}{2} (U_{GS} - U_T)^2 (1 + \lambda U_{DS})$$

$$\lambda = \frac{1}{U_A}$$

$$U_T = T_{T0} \pm \Delta U_T \quad N \rightarrow +$$

$$\Delta U_T = \gamma (\sqrt{U_{SB} \pm \Phi_0} - \sqrt{\Phi_0})$$

$$U_{temp} = \frac{kT}{e} = 86 \frac{\mu V}{K} T$$

$$I_M = I'_M \frac{W}{L}$$

$$n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB} + \Phi_0}}$$

$$K = K' \frac{W}{L} = \mu C_{oc} \frac{W}{L}$$

$$k = k' \frac{W}{L} = \mu C_{ox} \frac{W}{L}, \quad \alpha = \frac{K'}{k'}$$

I_D Drainstrom [A]

I_M Drainstrom-grenze [A]

U_{GS} U Gate Source [V]

U_{DS} Drain-Source [V]

U_T Schwellsp. [V]

U_{T0} $U_{T0N} \approx 0.6$ [V]

$U_{T0P} \approx 0.65$

U_{SB} U Source Bulk [V]

U_{temp} U-Temp. [V]

$\approx 26 \cdot 10^{-3}$

U_A Early-Span. [V]

Φ_0 Fermi-Pot.= [V]

$2\Phi_F = 0.6$

k Transkond. [$\frac{A}{V^2}$]

K k ungesättigt [$\frac{A}{V^2}$]

K', k' bei quadratischem Kanal [$\frac{A}{V^2}$]

typisch: $k_N =$

$44 \cdot 10^{-6}, k_P =$

$17 \cdot 10^{-6}$

α Transkond. [1]

Verhältnis

≈ 1

n Subthreshold [1]

Slope Faktor

≈ 1.5

γ $\gamma \approx 0.6$ [$\sqrt{V}$]

λ Mod-fakt. [$\frac{1}{V}$]

(0.01...0.05)

W Kanal-Länge [m]

L Kanal-Breite [m]

T Temperatur [K]

μ Beweglichkeit [$\frac{cm^2}{sV}$]

Ladungs-

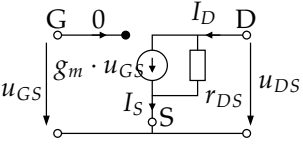
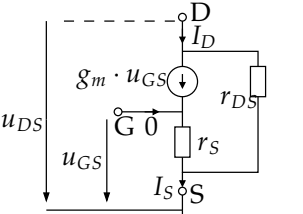
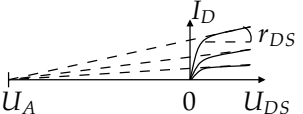
träger im

Kanal (Für Si:

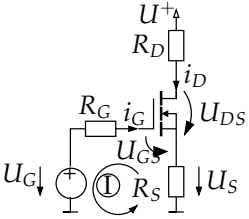
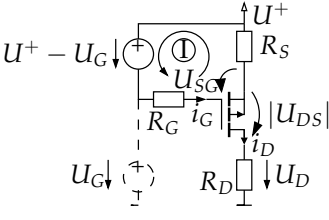
$\mu_p = 580$,

$\mu_n = 230$)

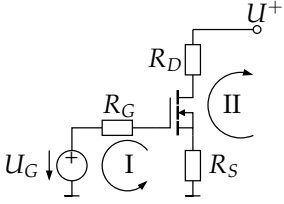
18.4 Kleinsignal Ersatzschaltbild für tiefe Frequenzen

π-Ersatzschaltbild: 	Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion: $g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} \approx K(U_{GS} - U_T)$ $g_m = K(U_{GS} - U_T)(1 + \lambda U_{DS})$	g_m Steilheit Übertragungskennlinie [1]
T-Ersatzschaltbild: 	$g_m = \sqrt{2kI_D(1 + \lambda U_{DS})}$ $g_m \approx \sqrt{2kI_D}$ $\frac{g_{m1}}{g_{m2}} = \sqrt{\frac{I_{D1}}{I_{D2}}}$	g_{mB} Body - Steilheit [1] r_S int. Source Widerstand [Ω] I_D Drainstrom [A] U_T Schwellspannung (0.6...8) [V]
Die Kleinsignal-Ersatzschaltbilder gelten für n- und p-Kanal FETs 	Ausgangswiderstand: $r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS} }{ I_D } \approx \frac{ U_A }{ I_D }$	U_A Early-Span. [V] U_{temp} U-Temp. $\approx 26 \cdot 10^{-3}$ [V] U_{DS} Drain-Source-Spannung [V] U_{GS} Gate-Source-Spannung [V]
	Steilheit im Stromquellenbetrieb bei schwacher Inversion: $g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} = \frac{I_D}{nU_{temp}}$ $r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{nU_{temp}}{I_D}$	U_{SG} Source-Gate-Spannung [V] U_{SB} Source-Bulk-Spannung [V] K Transkonduktanzparameter [$\frac{A}{V^2}$] n Subthreshold Slope Faktor ≈ 1.5 [1] λ Mod-fakt. (0.01...0.05) [$\frac{1}{V}$]
	Body Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion: $g_{mB} = \frac{dI_D}{dU_{SB}}$ $g_{mB} = -g_m \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB} + \Phi_0}}$ $g_{mB} = -g_m(n - 1)$ $\Rightarrow$ Back-Gate hat die halbe Wirkung des Gate bei $U_{SB} = 0$	Φ_0 Fermi-Pot. = $2\Phi_F = 0.6$ [V] γ $\gamma \approx 0.6$ [$\sqrt{V}$]

18.5 DC-Berechnung mit idealen MOSFET Gleichungen

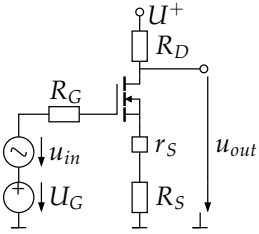
	Bei Verstärkern muss der Arbeitspunkt im Sättigungsbereich liegen! $\Rightarrow$ prüfen ob $u_{DS} > u_{GS} - U_T$	i_D Drainstrom [A] U^+ Speisespannung [V]
n-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{GS} = \left(U_T - \frac{1}{kR_S} \right) + \sqrt{\frac{2}{kR_S}(U_G - U_T) + \frac{1}{(kR_S)^2}}$	U_T Schwellspannung (0.6...8) [V] U_G Gate-Spannung [V] u_{DS} Drain-Source-Spannung [V] u_{GS} Gate-Source-Spannung [V] u_{SG} Source-Gate-Spannung [V] R_G R-Gate [Ω] R_D R-Drain [Ω] R_S R-Source [Ω] k Transkonduktanzparameter [$\frac{A}{V^2}$]
p-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{SG} = \left(U_T - \frac{1}{kR_S} \right) + \sqrt{\frac{2}{kR_S}(U_{GP} - U_T) + \frac{1}{(kR_S)^2}}$ $U_{GP} = U^+ - U_G$	
Arbeitspunkt:	$u_{DS} = U^+ - i_D(R_S + R_D)$	

18.6 Der FET als Schalter

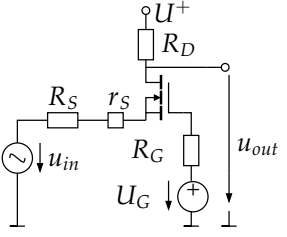
 meistens: $R_S = 0$ Der Fet muss im ohmschen Bereich betrieben werden Schalter offen wenn $u_{GS} < U_T$ Schalter geschlossen wenn $u_{GS} \gg U_T$	Aus I und II: $\begin{cases} u_G - i_D R_S - u_{GS} = 0 \\ U^+ - i_D (R_S + R_D) - u_{DS} = 0 \end{cases}$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = \frac{1}{r_{DS}}$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = K(u_{GS} - U_T) - Ku_{DS}$ $r_{DS0} = \frac{1}{K(u_{GS} - U_T)}$ eingeschaltet und $R_S = 0$: $i_D = \frac{U^+}{R_D + r_{DS0}}$ eingeschaltet und $R_S \neq 0$: $\begin{cases} u_G - \frac{R_S U^+}{R_S + R_D + r_{DS0}} - u_{GS} = 0 \\ r_{DS0} = \frac{1}{K(u_{GS} - U_T)} = 0 \end{cases}$	<table> <tr> <td>U^+</td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_S</td><td>R an Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_D</td><td>R an Drain</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>u_{GS}</td><td>Gate-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{DS}</td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_G</td><td>Gate-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>r_{DS}</td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>r_{DS0}</td><td>Einschaltwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td></td><td>$u_{DS} = 0$</td><td></td></tr> <tr> <td>i_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>U_T</td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>K</td><td>Transkond.</td><td>$[\frac{A}{V^2}]$</td></tr> </table>	U^+	Speisespannung	[V]	R_S	R an Source	[Ω]	R_D	R an Drain	[Ω]	u_{GS}	Gate-Source-Spannung	[V]	u_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]	u_G	Gate-Span.	[V]	r_{DS}	dyn.Source Widerstand	[Ω]	r_{DS0}	Einschaltwiderstand	[Ω]		$u_{DS} = 0$		i_D	Drainstrom	[A]	U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	K	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
U^+	Speisespannung	[V]																																				
R_S	R an Source	[Ω]																																				
R_D	R an Drain	[Ω]																																				
u_{GS}	Gate-Source-Spannung	[V]																																				
u_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]																																				
u_G	Gate-Span.	[V]																																				
r_{DS}	dyn.Source Widerstand	[Ω]																																				
r_{DS0}	Einschaltwiderstand	[Ω]																																				
	$u_{DS} = 0$																																					
i_D	Drainstrom	[A]																																				
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																				
K	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																				

18.7 Des FET als AC-Verstärker

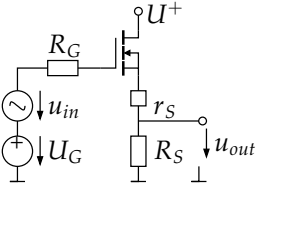
18.7.1 Sourceschaltung

 • invertierend • Für tiefe bis mittlere Frequenzen • r_{in} gross • r_{out} gross	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = -\frac{R_D}{R_S + r_s + \frac{R_S + R_D}{\mu}}$ $\mu = \frac{r_{DS}}{r_s} = A_{max}$ Für grosses μ: $A \approx -\frac{R_D}{R_S + r_s}$ Bei $R_S = 0$ gilt: $A = -\frac{R_D \parallel r_{DS}}{r_s}$ Bei $R_S = 0$ und $R_D = \infty$ gilt: $ A = \left \frac{r_{DS}}{r_s} \right = \mu$ $r_s = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr> <td>U^+</td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_G</td><td>R-Gate</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_D</td><td>R-Drain</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_S</td><td>R-Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>r_s</td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>g_m</td><td>Steilheit Kennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>U_{Early}</td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> </table>	U^+	Speisespannung	[V]	u_{in}	Eingangssp.	[V]	u_{out}	Ausgangssp.	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_G	R-Gate	[Ω]	R_D	R-Drain	[Ω]	R_S	R-Source	[Ω]	r_s	dyn.Source Widerstand	[Ω]	μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]	g_m	Steilheit Kennlinie	[1]	U_{Early}	Early 5...100	[V]	U_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]	I_D	Drainstrom	[A]
U^+	Speisespannung	[V]																																							
u_{in}	Eingangssp.	[V]																																							
u_{out}	Ausgangssp.	[V]																																							
A	Verstärkung	[1]																																							
R_G	R-Gate	[Ω]																																							
R_D	R-Drain	[Ω]																																							
R_S	R-Source	[Ω]																																							
r_s	dyn.Source Widerstand	[Ω]																																							
μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																							
g_m	Steilheit Kennlinie	[1]																																							
U_{Early}	Early 5...100	[V]																																							
U_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]																																							
I_D	Drainstrom	[A]																																							

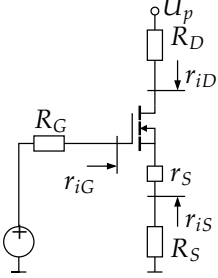
18.7.2 Gateschaltung

 • nicht invertierend • Für hohe Frequenzen • r_{in} klein • r_{out} gross	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = \frac{R_D \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}{r_s + R_S + \frac{R_D + R_S}{\mu}} = \frac{R_D}{R_S + r_s}$ $r_s = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr><td>U^+</td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{in}</td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{out}</td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>R_D</td><td>R-Drain</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>R_S</td><td>R-Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>r_s</td><td>dyn.Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td></td><td>Widerstand</td><td></td></tr> <tr><td>g_m</td><td>Steilheit</td><td>[1]</td></tr> <tr><td></td><td>Kennlinie</td><td></td></tr> <tr><td>U_{Early}</td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>U_{DS}</td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>μ</td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	U^+	Speisespannung	[V]	u_{in}	Eingangssp.	[V]	u_{out}	Ausgangssp.	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_D	R-Drain	[Ω]	R_S	R-Source	[Ω]	r_s	dyn.Source	[Ω]		Widerstand		g_m	Steilheit	[1]		Kennlinie		U_{Early}	Early 5...100	[V]	U_{DS}	Drain-Source	[V]	I_D	Drainstrom	[A]	μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]
U^+	Speisespannung	[V]																																										
u_{in}	Eingangssp.	[V]																																										
u_{out}	Ausgangssp.	[V]																																										
A	Verstärkung	[1]																																										
R_D	R-Drain	[Ω]																																										
R_S	R-Source	[Ω]																																										
r_s	dyn.Source	[Ω]																																										
	Widerstand																																											
g_m	Steilheit	[1]																																										
	Kennlinie																																											
U_{Early}	Early 5...100	[V]																																										
U_{DS}	Drain-Source	[V]																																										
I_D	Drainstrom	[A]																																										
μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																										

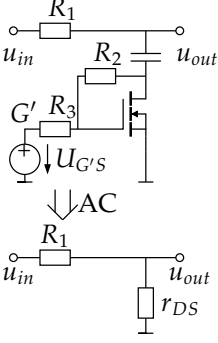
18.7.3 Drainschaltung

 • nicht invertierend • Spannungsfolger ($A = 1$), Impedanzwandler, Leistungstreiber • r_{in} gross • r_{out} klein	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = -\frac{R_S}{R_S + r_s \left(1 + \frac{R_S}{r_{ds}}\right)}$ $r_s = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr><td>U^+</td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{in}</td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>u_{out}</td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td>R_S</td><td>R-Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td>r_s</td><td>dyn.Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td></td><td>Widerstand</td><td></td></tr> <tr><td>g_m</td><td>Steilheit</td><td>[1]</td></tr> <tr><td></td><td>Kennlinie</td><td></td></tr> <tr><td>U_{Early}</td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>U_{DS}</td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr><td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td>μ</td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	U^+	Speisespannung	[V]	u_{in}	Eingangssp.	[V]	u_{out}	Ausgangssp.	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_S	R-Source	[Ω]	r_s	dyn.Source	[Ω]		Widerstand		g_m	Steilheit	[1]		Kennlinie		U_{Early}	Early 5...100	[V]	U_{DS}	Drain-Source	[V]	I_D	Drainstrom	[A]	μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]
U^+	Speisespannung	[V]																																							
u_{in}	Eingangssp.	[V]																																							
u_{out}	Ausgangssp.	[V]																																							
A	Verstärkung	[1]																																							
R_S	R-Source	[Ω]																																							
r_s	dyn.Source	[Ω]																																							
	Widerstand																																								
g_m	Steilheit	[1]																																							
	Kennlinie																																								
U_{Early}	Early 5...100	[V]																																							
U_{DS}	Drain-Source	[V]																																							
I_D	Drainstrom	[A]																																							
μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																							

18.8 Dynamische Innenwiderstände des MOS-Transistors

	$r_{iG} \rightarrow \infty$ $r_{iS} = r_S \parallel r_{DS} \approx r_S \quad (R_D = 0)$ $r_{iD} = r_{DS} \left(1 + \frac{R_S}{r_S} + \frac{R_S}{r_{DS}} \right)$ Falls $r_{DS} \gg R_S$: $r_{iD} \approx r_{DS} \left(1 + \frac{R_S}{r_S} \right)$ $r_{DS} = \frac{U_{DS} + U_{Early}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr> <td>r_{iG}</td><td>dyn. r-Gate</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{iD}</td><td>dyn. r-Drain</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{iS}</td><td>dyn. r-Source</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_S</td><td>siehe 18.4 auf S. 140</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{DS}</td><td>r-Drain-Source</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>U_{Early}</td><td>Early</td><td>5...100 [V]</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> </table>	r_{iG}	dyn. r-Gate	$[\Omega]$	r_{iD}	dyn. r-Drain	$[\Omega]$	r_{iS}	dyn. r-Source	$[\Omega]$	r_S	siehe 18.4 auf S. 140	$[\Omega]$	r_{DS}	r-Drain-Source	$[\Omega]$	U_{Early}	Early	5...100 [V]	U_{DS}	Drain-Source	[V]	I_D	Drainstrom	[A]	R	Widerstand	$[\Omega]$
r_{iG}	dyn. r-Gate	$[\Omega]$																											
r_{iD}	dyn. r-Drain	$[\Omega]$																											
r_{iS}	dyn. r-Source	$[\Omega]$																											
r_S	siehe 18.4 auf S. 140	$[\Omega]$																											
r_{DS}	r-Drain-Source	$[\Omega]$																											
U_{Early}	Early	5...100 [V]																											
U_{DS}	Drain-Source	[V]																											
I_D	Drainstrom	[A]																											
R	Widerstand	$[\Omega]$																											

18.9 Der FET als Spannungsgesteuerter Widerstand

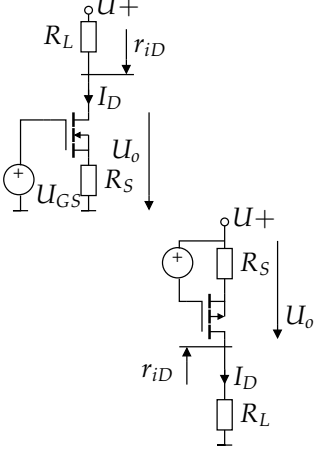
	ohne Linearisierung $R_2 = \infty$ und $R_3 = 0$: für kleine AC-Spannung: $r_{DS}(t) = r_{DS0}$ $u_{DS}(t) = \frac{u_{in}(t)r_{DS}(t)}{R_1 + r_{DS}(t)}$ für grössere AC-Spannung: $r_{DS}(t) = \frac{1}{K(U_{GS} - U_T) - u_{DS}(t)}$ mit Linearisierung $R_2 = R_3 \gg r_{DS}$: $\frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{r_{DS}}{R_1 + r_{DS}}$ $r_{DS} = \frac{du_{DS}}{di_{DS}} = \frac{2}{K(U_{GS} - 2U_T)}$	<table> <tr> <td>R_1</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>$R_{2,3}$</td><td>Linearisierung</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{DS}</td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangs-Sp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangs-Sp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>$u_{G'S}$</td><td>Gate'-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>r_{DS}</td><td>Drain-Source-Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{DS0}</td><td>Einschaltwiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>$u_{DS} = 0$</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>i_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>U_T</td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>K</td><td>Transkond.</td><td>$[\frac{A}{V^2}]$</td></tr> </table>	R_1	Widerstand	$[\Omega]$	$R_{2,3}$	Linearisierung	$[\Omega]$	r_{DS}	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$	u_{in}	Eingangs-Sp.	[V]	u_{out}	Ausgangs-Sp.	[V]	$u_{G'S}$	Gate'-Span.	[V]	r_{DS}	Drain-Source-Widerstand	$[\Omega]$	r_{DS0}	Einschaltwiderstand	$[\Omega]$	$u_{DS} = 0$			i_D	Drainstrom	[A]	U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	K	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
R_1	Widerstand	$[\Omega]$																																				
$R_{2,3}$	Linearisierung	$[\Omega]$																																				
r_{DS}	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$																																				
u_{in}	Eingangs-Sp.	[V]																																				
u_{out}	Ausgangs-Sp.	[V]																																				
$u_{G'S}$	Gate'-Span.	[V]																																				
r_{DS}	Drain-Source-Widerstand	$[\Omega]$																																				
r_{DS0}	Einschaltwiderstand	$[\Omega]$																																				
$u_{DS} = 0$																																						
i_D	Drainstrom	[A]																																				
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																				
K	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																				

18.10 MOS-Diode

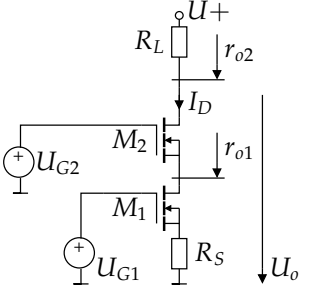
 Wichtig, alle Substrate auf gleichem Potential!	$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2$ $r_{MD} = r_s \parallel r_{DS}$ $r_{MD} = \frac{u_{DS}}{i_D}$ $r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D}$ $r_s = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}$ $U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{k(1 + \lambda U_{DS})}}$ $U_{GS} \approx U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{k}}$ Spannungsteiler $\frac{U_{GS1} - U_{T1}}{U_{GS2} - U_{T2}} = \sqrt{\frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}}}$	<table> <tr> <td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>U_T</td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Transkonduktanzparameter</td><td>$[\frac{A}{V^2}]$</td></tr> <tr> <td>U_{GS}</td><td>Gate-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>r_{MD}</td><td>Dynamischer Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>g_m</td><td>Steilheit Übertragungskennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>r_s</td><td>int. Source Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>U_A</td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Gate-Breite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Gate-Länge</td><td>[m]</td></tr> </table>	I_D	Drainstrom	[A]	U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	k	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$	U_{GS}	Gate-Source-Spannung	[V]	U_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]	r_{MD}	Dynamischer Widerstand	[Ω]	g_m	Steilheit Übertragungskennlinie	[1]	r_s	int. Source Widerstand	[Ω]	U_A	Early-Span.	[V]	W	Gate-Breite	[m]	L	Gate-Länge	[m]
I_D	Drainstrom	[A]																																	
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																	
k	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$																																	
U_{GS}	Gate-Source-Spannung	[V]																																	
U_{DS}	Drain-Source-Spannung	[V]																																	
r_{MD}	Dynamischer Widerstand	[Ω]																																	
g_m	Steilheit Übertragungskennlinie	[1]																																	
r_s	int. Source Widerstand	[Ω]																																	
U_A	Early-Span.	[V]																																	
W	Gate-Breite	[m]																																	
L	Gate-Länge	[m]																																	

18.11 Stromquellen

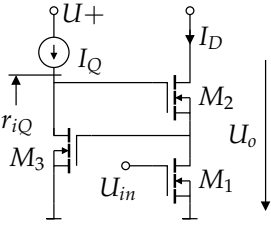
18.11.1 Einfache Stromquelle

 Die Schaltung ist für extrem kleine Betriebsspannungen ungeeignet, da über R_S eine Spannung abfallen muss. Für diesen Einsatzbereich eignet sich die Kaskodeschaltung, bei der R_S durch einen Transistor ersetzt wird.	Der Fet muss im gesättigten Bereich (siehe Kapitel 18.3) betrieben werden. Für $R_S = 0$: $I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2(1 + \lambda U_{DS})$ $r_{iD} = r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_A}{I_D}$ $U_o \geq U_{DSsat}$ Für $R_S \neq 0$: $I_D = \frac{U_G - U_{GS} - U_{SS}}{R_S}$ $r_{iD} = r_{DS} \left(1 + \frac{R_S}{r_s} + \frac{R_S}{r_{DS}} \right)$ $r_s = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}, \quad r_{DS} \approx \frac{U_A}{I_D}$ $U_o > R_S I_D + U_{DSsat}$ R_S dient als Gegenkopplung	<table> <tr> <td>I_D</td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>r_{iD}</td><td>Innenwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>U_o</td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_A</td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>U-Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_{SS}</td><td>Negative Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>U_T</td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Transkond.</td><td>$\left[\frac{A}{V^2}\right]$</td></tr> <tr> <td>$\lambda$</td><td>Mod-fakt.</td><td>$\left[\frac{1}{V}\right]$</td></tr> </table>	I_D	Drainstrom	[A]	r_{iD}	Innenwiderstand	[Ω]	U_o	Ausgangsspannung	[V]	U_A	Early-Span.	[V]	U_{DS}	U-Drain-Source	[V]	U_{SS}	Negative Speisespannung	[V]	U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	R	Widerstand	[Ω]	k	Transkond.	$\left[\frac{A}{V^2}\right]$	λ	Mod-fakt.	$\left[\frac{1}{V}\right]$
I_D	Drainstrom	[A]																														
r_{iD}	Innenwiderstand	[Ω]																														
U_o	Ausgangsspannung	[V]																														
U_A	Early-Span.	[V]																														
U_{DS}	U-Drain-Source	[V]																														
U_{SS}	Negative Speisespannung	[V]																														
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																														
R	Widerstand	[Ω]																														
k	Transkond.	$\left[\frac{A}{V^2}\right]$																														
λ	Mod-fakt.	$\left[\frac{1}{V}\right]$																														

18.11.2 Stromquelle mit Kaskode-Schaltung

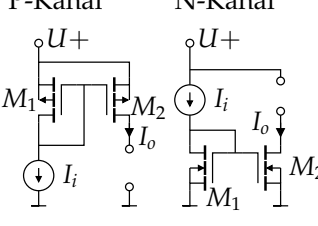
	$r_{o2} = r_{DS2} \left(1 + \frac{r_{DS1}}{r_{S2}} + \frac{r_{DS1}}{r_{DS2}} \right)$ Falls $\text{Typ}(M_1) = \text{Typ}(M_2)$: $r_{o2} \approx \frac{r_{DS}^2}{r_{D2}} = \mu r_{DS}$ $U_o \geq U_{G2} - U_{GS2} + U_{DSsat2}$	<table> <tr> <td>r_{iD}</td><td>Innenwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>U_o</td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>μ</td><td>Max Verstärkung Source Schaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	r_{iD}	Innenwiderstand	[Ω]	U_o	Ausgangsspannung	[V]	R	Widerstand	[Ω]	μ	Max Verstärkung Source Schaltung	[1]
r_{iD}	Innenwiderstand	[Ω]												
U_o	Ausgangsspannung	[V]												
R	Widerstand	[Ω]												
μ	Max Verstärkung Source Schaltung	[1]												

18.11.3 Stromquelle mit geregelter Kaskode-Schaltung

 Die Schaltung kann auch als Supertransistor interpretiert werden.	$r_o = r_{DS1} r_{DS2} g_{m1} g_{m3} (r_{DS3} \parallel r_{iQ})$ $U_o \geq 2U_{DSsat}$ Strom kann wie in vorhergehender Schaltung berechnet werden.	<table> <tr> <td>r_o</td><td>Innenwiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>U_o</td><td>Ausgangsspannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>U-Drain-Source</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Gate-Steilheit</td><td>$[1]$</td></tr> </table>	r_o	Innenwiderstand	$[\Omega]$	U_o	Ausgangsspannung	$[V]$	U_{DS}	U-Drain-Source	$[V]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	g	Gate-Steilheit	$[1]$
r_o	Innenwiderstand	$[\Omega]$															
U_o	Ausgangsspannung	$[V]$															
U_{DS}	U-Drain-Source	$[V]$															
R	Widerstand	$[\Omega]$															
g	Gate-Steilheit	$[1]$															

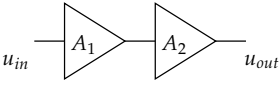
18.12 Stromspiegel

18.12.1 Widlar Stromspiegel

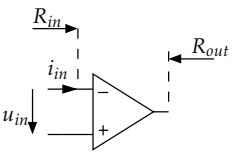
 Ein Stromspiegel kann auch mehrere Ausgänge haben. Der Eingangstransistor ist als MOS-Diode geschaltet. Die Genauigkeit der Schaltung hängt sehr von den Exemplaren der Transistoren ab.	$U_{omin} = U_{DSsat} = U_{GS2} - U_{T2}$ $U_{omin} = \sqrt{\frac{2I_{D2}}{k}}$ $n = \frac{I_o}{I_i} \approx i_o i_i$ $n = \frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}} \cdot \frac{1 + \lambda_2 U_{DS2}}{1 + \lambda U_{DS1}}$ $r_o = r_{DS2} = \frac{U_{A2} + U_{DS2}}{I_{D2}}$ $r_o \approx \frac{U_{A1}}{I_D} = \frac{1}{\lambda I_D}$ $r_i = r_{S1} \parallel r_{DS1} \approx r_{S1} = \frac{1}{g_{m1}}$ $r_i = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}$ $U_i = U_{GS1} = \sqrt{\frac{2I_D}{k}} + U_{T1}$	<table> <tr> <td>r_o</td><td>Innenwiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_i</td><td>Ausgangswiderstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_{DS}</td><td>r-Source</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>r_S</td><td>r-Drain-Source</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>U_o</td><td>Ausgangsspannung</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_{DS}</td><td>U-Drain-Source</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_{GS}</td><td>U-Gate-Source</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_T</td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>U_A</td><td>Early-Span.</td><td>$[V]$</td></tr> <tr> <td>I_D</td><td>Drain-Strom</td><td>$[A]$</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>$[\Omega]$</td></tr> <tr> <td>g</td><td>Gate-Steilheit</td><td>$[1]$</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Transkond.</td><td>$[\frac{A}{V^2}]$</td></tr> <tr> <td>λ</td><td>Mod-fakt.</td><td>$[\frac{1}{V}]$</td></tr> <tr> <td>W</td><td>Gate-Breite</td><td>$[m]$</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Gate-Länge</td><td>$[m]$</td></tr> </table>	r_o	Innenwiderstand	$[\Omega]$	r_i	Ausgangswiderstand	$[\Omega]$	r_{DS}	r-Source	$[\Omega]$	r_S	r-Drain-Source	$[\Omega]$	U_o	Ausgangsspannung	$[V]$	U_{DS}	U-Drain-Source	$[V]$	U_{GS}	U-Gate-Source	$[V]$	U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$	U_A	Early-Span.	$[V]$	I_D	Drain-Strom	$[A]$	R	Widerstand	$[\Omega]$	g	Gate-Steilheit	$[1]$	k	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$	λ	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$	W	Gate-Breite	$[m]$	L	Gate-Länge	$[m]$
r_o	Innenwiderstand	$[\Omega]$																																																
r_i	Ausgangswiderstand	$[\Omega]$																																																
r_{DS}	r-Source	$[\Omega]$																																																
r_S	r-Drain-Source	$[\Omega]$																																																
U_o	Ausgangsspannung	$[V]$																																																
U_{DS}	U-Drain-Source	$[V]$																																																
U_{GS}	U-Gate-Source	$[V]$																																																
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$																																																
U_A	Early-Span.	$[V]$																																																
I_D	Drain-Strom	$[A]$																																																
R	Widerstand	$[\Omega]$																																																
g	Gate-Steilheit	$[1]$																																																
k	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																																
λ	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$																																																
W	Gate-Breite	$[m]$																																																
L	Gate-Länge	$[m]$																																																

19 Operationsverstärker

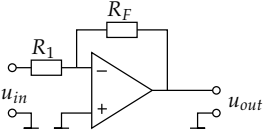
19.1 Verstärkung

	Spannungsverstärkung: $A_U[dB] = 20 \log \frac{u_{out}}{u_{in}}$ Leistungsverstärkung: $A_P[dB] = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$ $A_{tot}[dB] = \sum_i A_i[dB]$ $A_{tot}[1] = A_1[1] A_2[1] \dots A_n[1]$	A_U Spannungsverstärkung [1] A_P Leistungsverstärkung [1] A_{tot} A total [1] u_{in} Eingangsspannung [V] u_{out} Ausgangsspannung [V]
---	--	--

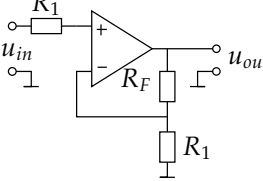
19.2 Idealer OP

	$R_{out} = 0$ $R_{in} = \infty$ $i_{in} = 0$ $u_{in} = 0$	R_{out} Ausgangswiderstand [Ω] R_{in} Eingangswiderstand [Ω] i_{in} Eingangsstrom [A] u_{in} Eingangsspannung [V]
---	---	---

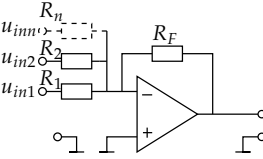
19.2.1 Invertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_1</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopplungswiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>A_{CL}</td><td>Closed Loop Gain</td><td>[1]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangsspannung	[V]	u_{in}	Eingangsspannung	[V]	R_1	Widerstand	[Ω]	R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]	A_{CL}	Closed Loop Gain	[1]
u_{out}	Ausgangsspannung	[V]															
u_{in}	Eingangsspannung	[V]															
R_1	Widerstand	[Ω]															
R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]															
A_{CL}	Closed Loop Gain	[1]															

19.2.2 Nichtinvertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_F}{R_1} + 1$ Impedanzwandler: $R_F = 0, R_1 = \infty \Rightarrow A = 1$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_1</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopplungswiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangsspannung	[V]	u_{in}	Eingangsspannung	[V]	R_1	Widerstand	[Ω]	R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]
u_{out}	Ausgangsspannung	[V]												
u_{in}	Eingangsspannung	[V]												
R_1	Widerstand	[Ω]												
R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]												

19.2.3 Addierer

	$u_{out} = A_1 u_{in1} + A_2 u_{in2} + \dots + A_n u_{inn}$ $A_n = -\frac{R_F}{R_n}$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopplungswiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_n</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangsspannung	[V]	u_{in}	Eingangsspannung	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]	R_n	Widerstand	[Ω]
u_{out}	Ausgangsspannung	[V]															
u_{in}	Eingangsspannung	[V]															
A	Verstärkung	[1]															
R_F	Rückkopplungswiderstand	[Ω]															
R_n	Widerstand	[Ω]															

19.2.4 Subtrahierer

	$u_{out} = A_1 u_{inn} + A_2 u_{inp}$ $A_n = -\frac{R_F}{R_1}$ $A_p = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \left(\frac{R_F}{R_1} + 1 \right)$ Differenzverst.: $A_1 = A_2$ $\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_F}{R_1} = u_{Diff}$ $u_{out} = u_{Diff}(u_{inp} - u_{inn})$ meist: $R_1 = R_3, R_F = R_2$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{Diff}</td><td>Differenz- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopp- lungswider- stand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_n</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]	u_{in}	Eingangs- spannung	[V]	u_{Diff}	Differenz- spannung	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_F	Rückkopp- lungswider- stand	[Ω]	R_n	Widerstand	[Ω]
u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]																		
u_{in}	Eingangs- spannung	[V]																		
u_{Diff}	Differenz- spannung	[V]																		
A	Verstärkung	[1]																		
R_F	Rückkopp- lungswider- stand	[Ω]																		
R_n	Widerstand	[Ω]																		

19.2.5 Mehrfach Addierer und Subtrahierer

Dummy input	falls: $A_{n1} + A_{n2} + \dots = A_{p1} + A_{p2} + \dots$ $u_{out} = \sum_i A_{pi} u_{pi} - \sum_j A_{nj} u_{nj}$ Beispiele : $R_{n1} = \frac{R_F}{ A_{n1} }, R_{p1} = \frac{R_F}{ A_{p1} }$ $A_{n1} = \frac{R_F}{R_{n1}}$ $A_{p1} = \left(\frac{R_F}{R_{n1} \parallel \dots \parallel R_{nj}} + 1 \right) \left(\frac{(R_{p2} \parallel \dots \parallel R_{pi}) \parallel R_V}{R_{p1} + (R_{p2} \parallel \dots \parallel R_{pi}) \parallel R_V} \right)$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>$u_{n,p}$</td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopp- lungswider- stand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_n</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]	$u_{n,p}$	Eingangs- spannung	[V]	A	Verstärkung	[1]	R_F	Rückkopp- lungswider- stand	[Ω]	R_n	Widerstand	[Ω]
u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]															
$u_{n,p}$	Eingangs- spannung	[V]															
A	Verstärkung	[1]															
R_F	Rückkopp- lungswider- stand	[Ω]															
R_n	Widerstand	[Ω]															

19.2.6 Instrumentationsverstärker

	$u_{out} = (u_{inp} - u_{inn}) \frac{2R_1 + P}{P}$ $A_{Diff} = 1 + \frac{2R_1}{P}$ $u_p - u_n = i(2R_1 + P)$	<table> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{inn}</td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{inp}</td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>A_{Diff}</td><td>Diff-Verst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]	u_{inn}	Eingangs- spannung	[V]	u_{inp}	Eingangs- spannung	[V]	A_{Diff}	Diff-Verst.	[1]
u_{out}	Ausgangs- spannung	[V]												
u_{inn}	Eingangs- spannung	[V]												
u_{inp}	Eingangs- spannung	[V]												
A_{Diff}	Diff-Verst.	[1]												

19.2.7 Stromquelle

	Variante 1 und 2: $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	u_{ref} Referenzspannung [V] i_L Strom durch R_L [A] R_L Lastwiderstand [Ω] R Widerstand [Ω]
	Variante 3: $i_L = -\frac{u_{ref}}{R_1} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_3}$	
	Variante 4: falls $R_{2a} = R_{2b} = R_{2c} = R_{2d}$: $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	

19.2.8 Stromspiegel

	$n = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \frac{R_1}{R_2}$ $u_{R_1} = u_{R_2}, R_1 i_{in} = R_2 i_{out}$	i_{in} Referenzstrom [A] i_{out} Strom durch R_L [A] R_L Lastwiderstand [Ω] R Widerstand [Ω] n Teilverhältnis [1]
--	--	--

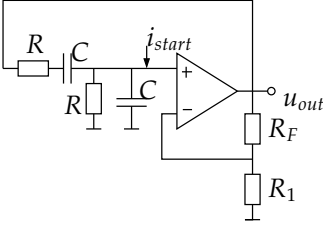
19.2.9 Differentieller UI-Wandler

	$i_L = \frac{u_1 - u_2}{R}$ $R = R_a = R_b = R_c = R_d$	<table> <tr> <td>u_1</td><td>Eingangssp. 1</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_2</td><td>Eingangssp. 2</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_L</td><td>Lastwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_1	Eingangssp. 1	[V]	u_2	Eingangssp. 2	[V]	R_L	Lastwiderstand	[Ω]	R	Widerstand	[Ω]
u_1	Eingangssp. 1	[V]												
u_2	Eingangssp. 2	[V]												
R_L	Lastwiderstand	[Ω]												
R	Widerstand	[Ω]												

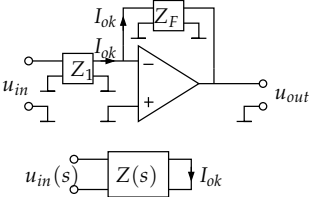
19.2.10 Schmitt-Trigger

Nicht invertierend: Invertierend:	Nicht invertierend: $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1}{R_F}(u_{ref} - u_{outmin})$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1}{R_F}(u_{outmax} - u_{ref})$ $u_H = u_T^+ - u_T^-$ $u_H = (u_{outmax} - u_{outmin}) \frac{R_1}{R_F}$ Invertierend: $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1(u_{outmax} - u_{ref})}{R_1 + R_F}$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1(u_{ref} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$ $u_H = \frac{R_1(u_{outmax} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$	<table> <tr> <td>u_T^+</td><td>Sprungspannung ↗</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_T^-</td><td>Sprungspannung ↘</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_H</td><td>Hysteresespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{ref}</td><td>Referenzspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{outmax}</td><td>→ +Speisung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{outmin}</td><td>→ -Speisung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R_F</td><td>Rückkopplungs-Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>R_1</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	u_T^+	Sprungspannung ↗	[V]	u_T^-	Sprungspannung ↘	[V]	u_H	Hysteresespannung	[V]	u_{ref}	Referenzspannung	[V]	u_{outmax}	→ +Speisung	[V]	u_{outmin}	→ -Speisung	[V]	R_F	Rückkopplungs-Widerstand	[Ω]	R_1	Widerstand	[Ω]
u_T^+	Sprungspannung ↗	[V]																								
u_T^-	Sprungspannung ↘	[V]																								
u_H	Hysteresespannung	[V]																								
u_{ref}	Referenzspannung	[V]																								
u_{outmax}	→ +Speisung	[V]																								
u_{outmin}	→ -Speisung	[V]																								
R_F	Rückkopplungs-Widerstand	[Ω]																								
R_1	Widerstand	[Ω]																								

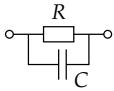
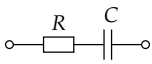
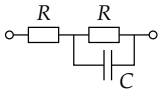
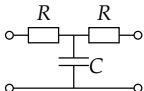
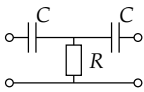
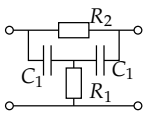
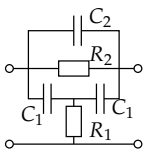
19.2.11 Wien-Robinson Oszillator

	$ G = \frac{\omega T}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2DT)^2}}$ $T = RC, \quad D = \frac{3}{2}$ $\varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega 2DT}{1 - \omega^2 T^2}\right)$ Amplitudenbedingung: $A_{Loop} \geq 1$ Phasenbedingung: $\varphi_{Loop} = n \cdot 360^\circ,$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	<table> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>D</td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> </table>	T	Periode	[s]	D	Dämpfung	[1]	u_{out}	Ausgang	[V]	R	Widerstand	[Ω]	C	Kapazität	[F]
T	Periode	[s]															
D	Dämpfung	[1]															
u_{out}	Ausgang	[V]															
R	Widerstand	[Ω]															
C	Kapazität	[F]															

19.2.12 Beschaltung des OPs mit Zweitoren

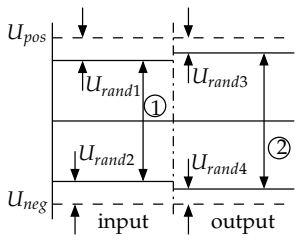
	Gilt nur für invertierenden Verstärker, da sonst kein virtueller Kurzschluss am Ausgang der Zweitore ist! $A(s) = \frac{u_{in}}{u_{out}} = -\frac{Z_F(s)}{Z_1(s)}$ $Z(s) = \frac{u_{in}(s)}{i_{ok}(s)}$	<table> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>u_{in}</td><td>Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>u_{out}</td><td>Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>Z</td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td>i_{ok}</td><td>Kurzschlussstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td>s</td><td>Laplace Operator</td><td>[1]</td></tr> </table>	A	Verstärkung	[1]	u_{in}	Eingang	[V]	u_{out}	Ausgang	[V]	Z	Impedanz	[Ω]	i_{ok}	Kurzschlussstrom	[A]	s	Laplace Operator	[1]
A	Verstärkung	[1]																		
u_{in}	Eingang	[V]																		
u_{out}	Ausgang	[V]																		
Z	Impedanz	[Ω]																		
i_{ok}	Kurzschlussstrom	[A]																		
s	Laplace Operator	[1]																		

Häufig verwendete Zweitore

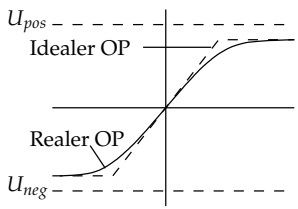
	$\frac{R}{1 + sRC}$	R Kapazität [F] C Widerstand [Ω] Z Impedanz [Ω] s Laplace Operator [1]
	$\frac{1}{sC}(1 + sRC)$	
	$(R_1 + R_2) \frac{1 + s \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{1 + s R_2 C}$	
	$R(2 + sRC)$	
	$\frac{1}{sC} \frac{1 + s2RC}{sRC}$	
	$R_2 \frac{1 + s2R_1C_1}{1 + s2R_1C_1 + s^2R_1R_2C_1^2}$	
	$\frac{R_2(1 + s2R_1C_1)}{1 + s(2R_1C_2 + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_1(C_1 + 2C_2)}$	

19.3 Realer Operationsverstärker

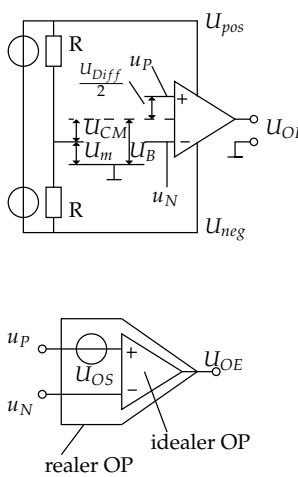
19.3.1 Ein- und Ausgangsspannungsbereich

 1: Eingangsspannungsbereich 2: Ausgangsspannungsbereich	input rail to rail (IRR): $U_{rand1}, U_{rand2} = 0$ output rail to rail (ORR): $U_{rand3}, U_{rand4} = 0$	U_{rand} Randspannung [V] U_{pos} Positive Speisespannung [V] U_{neg} Negative Speisespannung [V]
--	--	---

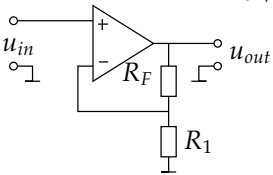
19.3.2 Übertragungskennlinie

	$U_O = A_O U_{Diff}$ $A_O = \frac{dU_O}{dU_D}$	U_O Ausgangsspannung [V] U_{Diff} Differenzspannung [V] A_O Open Loop Verstärkung [1]
--	--	---

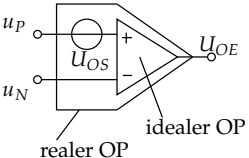
19.3.3 Gleichtaktfehler (Common Mode Error)

	$U_m = \frac{U_{pos} + U_{neg}}{2}$ $U_B = \frac{U_P + U_N}{2}$ $U_{CM} = U_B - U_m$ $U_{OS} = \frac{ U_{CM} }{CMRR}$ $U_{OE} = U_{OS} A_{pos}$ $U_{OE} = A_O \left(U_{Diff} + \frac{U_{CM}}{CMRR} + \frac{U_m}{A_O} \right)$ $CMRR_{max} = \frac{U_{Diff}}{U_{CM}} = \frac{U_{Diff} + 1}{4\epsilon}$	U_m Mittenspan. [V] U_B Biasspan. [V] U_{CM} Common Mode Spannung [V] U_{OS} Offsetspannung [V] U_{pos} Speisespannung [V] U_{neg} Speisespannung [V] U_P Spannung am pos. Eingang [V] U_N Spannung am neg. Eingang [V] A_O Open Loop Verstärkung [1] $CMRR$ Gleichtakterdrückung [1] ϵ Widerstandstoleranz [1]
---	--	--

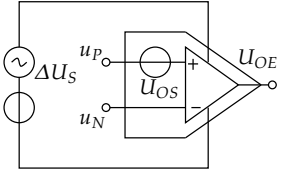
19.3.4 Effektive, geschlossene Verstärkung

Beim realen OP ist $A_0 \neq \infty$ 	Nicht invertierend: $\frac{1}{ A_{Clreal} } = \frac{1}{ A_{Clid} } + \frac{1}{ A_0 }$ Invertierend: $\frac{1}{ A_{Clreal} } = \frac{1}{ A_{Clid} } + \frac{1}{ \eta A_0 }$ $\eta = \frac{R_F}{R_F + R_1}$	A_{Clreal} Effektive Ver- [1] stärkung real A_{Clid} Closed Loop [1] Verstärkung ideal A_0 Open Loop [1] Verstärkung R Widerstand [Ω]
--	---	---

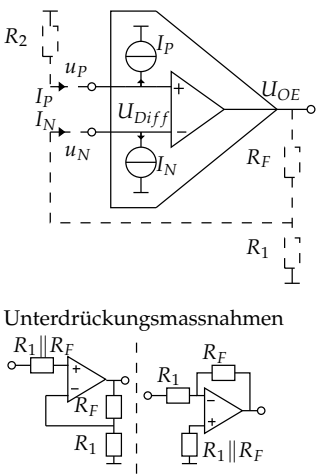
19.3.5 Offsetfehler

	$U_{OE} = U_{OS} A_{pos}$ $U_{OE} = U_{OS} \left(1 + \frac{R_F}{R_1} \right)$	U_{OE} Offset-Fehler- [V] Spannung U_{OS} Offsetspan- [V] nung A_{pos} pos. Verstär- [1] kung (DC) R_F, R_1 siehe Seite 150 [Ω]
--	--	---

19.3.6 Versorgungsspannungsfehler (Power supply error)

	$U_{OS} = \frac{\Delta U_S}{PSRR}$ $U_{OE} = U_{OS} A_{pos}$	U_S Speisung [V] U_{OE} Offset-Fehler- [V] Spannung U_{OS} Offsetspan- [V] nung A_{pos} pos. Verstär- [1] kung PSRR Unter- [1] drückung der Speise- spannungs- einflüsse
---	--	---

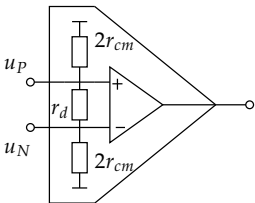
19.3.7 Eingangsströme (Bias- und Offsetstrom)

 Unterdrückungsmassnahmen	$I_{OS} = I_P - I_N $ $I_B = \frac{I_P + I_N}{2}$ $U_{OE} = - I_P R_2 A_{pos} + I_N R_F $ Bester Fall (Einfluss $I_B = 0$): $R_2 = R_F R_1$ $\Downarrow$ $U_{OE} = - I_{OS} R_F $	I_{OS} Offsetstrom [A] $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang [A] I_B Biasstrom [A] U_{OE} Offset-Fehler-Spannung [V] A_{pos} pos. Verstärkung [1] $R_{1,2}$ Widerstand nach GND [Ω]
---	---	---

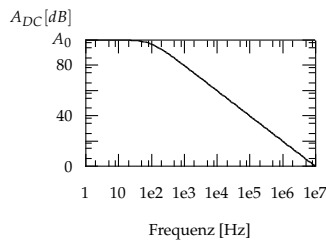
19.3.8 Kombination der statischen Fehler

	$U_{OE} = A_{pos} (\text{Offsetfehler} + \text{Versorgungsspannungsfehler} + \text{Gleichtaktfehler}) + \text{Eingangsstromfehler}$ $U_{OE} = A_{pos} \left[U_{OS} + \left \frac{\Delta U_S}{PSRR} \right + \left \frac{\Delta U_{CM}}{CMRR} \right \right] + *$ Worst-Case: $* = \left(I_N R_F - I_P R_2 \frac{R_F + R_1}{R_1} \right)$ Bei unterdrücktem Biasstrom - Fehler: $* = I_{OS} R_F$	I_{OS} Offsetstrom [A] $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang [A] I_B Biasstrom [A] U_{OE} Offset-Fehler-Spannung [V] A_{pos} pos. Verstärkung [1]
--	---	---

19.3.9 Dynamischer Eingangswiderstand

	Messung bei verbundenen Eingängen: $r_{cm} = 2r_{cm} 2r_{cm}$	r_d Dynamischer Widerstand [Ω] r_{cm} Common Mode Resistance [Ω]
---	---	---

19.3.10 Frequenzgang



Knick:

$$f_0 : A_{OL} = A_{DC} - 3dB$$

(ca. 100 Hz in Grafik)

$$f_T : A_{OL} = 0dB = 1$$

(ca. 10^7 Hz in Grafik)

$$f_0 = \frac{f_T}{A_0}$$

Der Verstärkungsabfall beträgt $-20 \frac{dB}{Dec}$

$$A_{CLreal}(s) = \frac{A_{CLDC}}{1 + sT_{neu}}$$

$$A_{CLDC} = \frac{A_{OLDC}}{1 + k(s)A_{OLDC}}$$

$$T_{neu} = \frac{T_0}{1 + k(s)A_{OLDC}}$$

$$\omega_{neu} = \omega_0[1 + k(s)A_{OLDC}]$$

Nichtinvertierender Verstärker:

$$k(s) = \frac{R_1 + R_F}{R_1}$$

$$f_{neu} = f_0(1 + kA_{OLDC})$$

$$f_{neu}A_{CL}^+ = GBP (= f_T)$$

$$f_{neu} = f_0A_{OLDC}$$

Invertierender Verstärker:

$$f_{neu} = k \cdot BGP = \frac{GBP}{A_{CL}^- + 1}$$

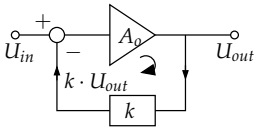
$$f_{neu}(A_{CL}^- + 1) = GBP (= f_T)$$

$$f_{neu} = \frac{1}{2}f_0A_{OLDC}$$

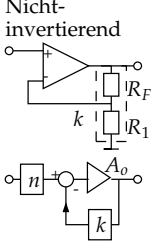
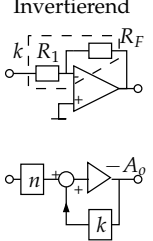
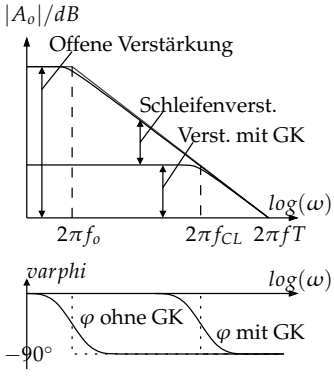
f_0	Kleinsignal Bandbreite [Hz]
f_T	Transitfrequenz, Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt [Hz]
A_{OL}	Open Loop Gain [1]
A_{CL}	Closed Loop Gain [1]
A_{CL}^+	A_{CL} nichtinvertierender Verstärker [1]
s	Laplace Operator [1]
T_{neu}	Closed Loop Zeitkonst. [s]
k	Faktor des Spannungsteilers [1]
ω	Knickfrequenz [Hz]
f_{neu}	Knickfrequenz [Hz]
GBP	Verstärkungs Bandbreitenprodukt [1]

20 Gegengekoppelte Verstärker

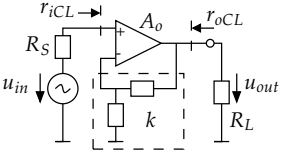
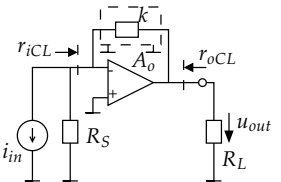
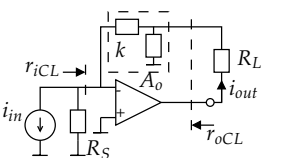
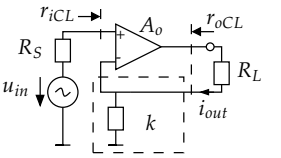
20.1 Mit- und Gegenkopplung

	Gegenkopplung: $A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 + kA_o}$ Mitkopplung: $A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 - kA_o}$	A_{CL} Closed Loop [1] Verstärkung A_o Open Loop [1] Verstärkung U Spannung [V] k Faktor [1]
---	---	--

20.1.1 Gegenkopplung beim OP

Nicht-invertierend  Invertierend  Bodeplot: 	Ideal: $A_{CL} = \frac{nA_o}{1 + kA_o}$ Nicht invertierend: $n = 1$ $ A_{CLideal} = \frac{R_F + R_1}{R_1} = \frac{1}{k}$ Invertierend: $n = \frac{R_F}{R_1 + R_F} \quad k = \frac{R_1}{R_1 + R_F}$ $ A_{CLideal} = \frac{R_F}{R_1}$ Real: $A_{CLreal} = nA_o A_{CLideal}$	A_{CL} Closed Loop [1] Verstärkung A_o Open Loop [1] Verstärkung k GK-Faktor [1] n Faktor [1] R Widerstand [Ω]
--	--	--

20.2 Gegenkopplungsarten

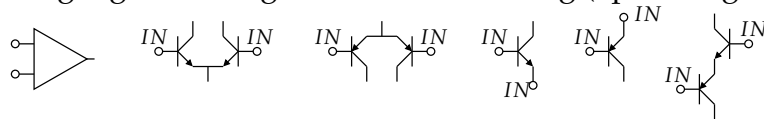
Serie-Parallel 	Eingang: Seriell Ausgang: Parallel $r_{iCL} \rightarrow \infty \quad r_{oCL} \rightarrow 0$ $r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$	A_o Open Loop [1] Verstärkung k Faktor [1] r_i Open Loop r- [Ω] Eingang r_o Open Loop r- [Ω] Ausgang r_{iCL} Closed Loop [Ω] r-Eingang r_{oCL} Closed Loop [Ω] r-Ausgang u_{out} u-Ausgang [V] i_{out} i-Ausgang [A] R_S Quell- [Ω] Widerst. R_L Last-Widerst. [Ω]
Parallel-Parallel 	Eingang: Parallel Ausgang: Parallel $r_{iCL} \rightarrow 0 \quad r_{oCL} \rightarrow 0$ $r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$	
Parallel-Serie 	Eingang: Parallel Ausgang: Seriell $r_{iCL} \rightarrow 0 \quad r_{oCL} \rightarrow \infty$ $r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$	
Serie-Serie 	Eingang: Seriell Ausgang: Seriell $r_{iCL} \rightarrow \infty \quad r_{oCL} \rightarrow \infty$ $r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$	

20.2.1 Bestimmung der Gegenkopplungsart

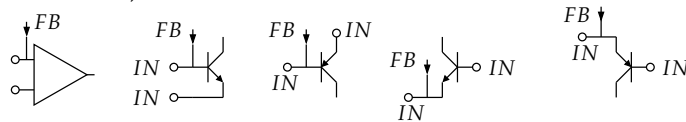
1. Forwardpfad, Rückwärtspfad und Gegenkopplungsschleife einzeichnen.
2. Anzahl Inversionen im Vorwärtspfad ($\Rightarrow$ Invertierend oder nicht invertierend) bzw. in der Schleife bestimmen ($\Rightarrow$ Gegenkopplung bei ungerade Anzahl bzw. Mittkopplung bei gerader Anzahl).
3. Knoten (out, in+ und in-) der Äquivalenten OP-Schaltung bestimmen.
4. Äquivalenten OP-Schaltung zeichnen.

20.2.2 Eingangsschaltungen

Eingangsschaltungen bei Serieschaltung (Spannungsaddition)

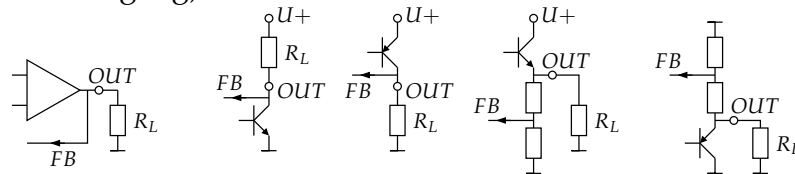


Eingangsschaltungen bei Parallelschaltung von Verstärkereingang und Ausgang (Stromaddition)

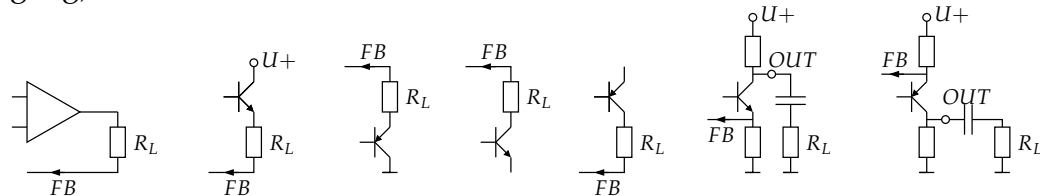


20.2.3 Ausgangsschaltungen

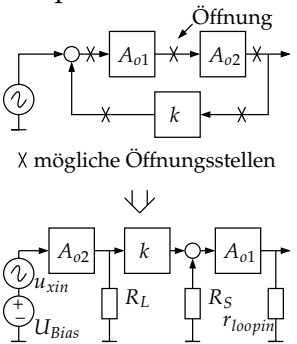
Ausgangsschaltungen bei Parallelschaltung von Last und Eingang (Spannungsabnahme am Ausgang)



Ausgangsschaltungen bei Serieschaltung von Last und Eingang (Stromabnahme am Ausgang)



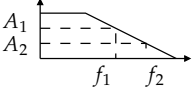
20.3 Schleifenverstärkung

Beispiel:  x mögliche Öffnungsstellen	$A_L = kA_o = \frac{u_{xout}}{u_{xin}}$ Gegenkopplungsgrad: $1 + A_L = 1 + kA_L$ U_{Bias} legt den Arbeitspunkt fest. Es soll eine Trennstelle gewählt werden bei der $r_{loopout} \gg r_{loopin}$ gilt $\Rightarrow$ Belastung des Schleifenausganges kann vernachlässigt werden.	<table> <tr> <td>A_L</td><td>Schleifen-Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>A_o</td><td>Open Loop Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>U</td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	A_L	Schleifen-Verstärkung	[1]	A_o	Open Loop Verstärkung	[1]	U	Spannung	[V]	k	Faktor	[1]	R	Widerstand	[Ω]
A_L	Schleifen-Verstärkung	[1]															
A_o	Open Loop Verstärkung	[1]															
U	Spannung	[V]															
k	Faktor	[1]															
R	Widerstand	[Ω]															

20.4 Wirkung der GK auf die Sensitivität der Verstärkung

Die Sensitivität S_x^N ist ein Mass für die Empfindlichkeit einer Schaltungseigenschaft N gegenüber Schwankungen eines Parameters x.	$S_x^N = \frac{\frac{dN}{N}}{\frac{dx}{x}}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{\frac{dA_{CL}}{A_{CL}}}{\frac{dA_o}{A_o}} = \frac{A_o}{A_{CL}} \frac{dA_{CL}}{dA_o}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{1}{1 + kA_o}$	<table> <tr> <td>S</td><td>Sensitivität</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>A_L</td><td>Schleifen-Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>A_o</td><td>Open Loop Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>x</td><td>veränderter Parameter</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>N</td><td>Beeinflusste Grösse</td><td>[...]</td></tr> </table>	S	Sensitivität	[1]	A_L	Schleifen-Verstärkung	[1]	A_o	Open Loop Verstärkung	[1]	k	Faktor	[1]	x	veränderter Parameter	[...]	N	Beeinflusste Grösse	[...]
S	Sensitivität	[1]																		
A_L	Schleifen-Verstärkung	[1]																		
A_o	Open Loop Verstärkung	[1]																		
k	Faktor	[1]																		
x	veränderter Parameter	[...]																		
N	Beeinflusste Grösse	[...]																		

20.5 Das Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt

Für alle Punkte die auf einer Amplitudengeraden mit einer Neigung von $\pm 20 \frac{dB}{Dek}$ liegen gilt das Gesetz vom konstanten Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt. Siehe auch S. 113 	$Af = f_T = GBP$ $A_1 f_1 = A_2 f_2$ $A_{oDC} = f_o = GBP$	<table> <tr> <td>f_T</td><td>Transitfrequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td></td><td>= Amplitude $\cap$ 0dB-Achse</td><td></td></tr> <tr> <td>f</td><td>Frequenz</td><td>$[\frac{1}{s}]$</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>A_{oDC}</td><td>Open-Loop DC-Gain</td><td>[1]</td></tr> </table>	f_T	Transitfrequenz	$[\frac{1}{s}]$		= Amplitude $\cap$ 0dB-Achse		f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$	A	Verstärkung	[1]	A_{oDC}	Open-Loop DC-Gain	[1]
f_T	Transitfrequenz	$[\frac{1}{s}]$															
	= Amplitude $\cap$ 0dB-Achse																
f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$															
A	Verstärkung	[1]															
A_{oDC}	Open-Loop DC-Gain	[1]															

Teil V

Digitale Signalverarbeitung

21 Stochastische Signale

21.1 Allgemein

hallo	$M = Fr$	r Radius $[m]$
-------	----------	------------------

22 Abtastung

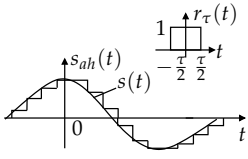
22.1 Ideale Abtastung

Zeitbereich: Frequenzbereich:	$s_a(t) = s(t)T\delta_p(t)$ $s_a(t) = Ts(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$ $s_a(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(t - mT)$ $S_a(\omega) = S(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_c)$ $S_a(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)$ $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$	<table> <tr> <td>s</td><td>Signal</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>s_a</td><td>s abgetastet</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Spektrum von s</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>m</td><td>m-te Periode</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>[$\frac{1}{s}$]</td></tr> <tr> <td>ω_c</td><td>Abtastfrequenz</td><td>[$\frac{1}{s}$]</td></tr> </table>	s	Signal	[...]	s_a	s abgetastet	[...]	S	Spektrum von s	[...]	t	Zeit	[s]	T	Periode	[s]	m	m-te Periode	[1]	ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]	ω_c	Abtastfrequenz	[$\frac{1}{s}$]
s	Signal	[...]																								
s_a	s abgetastet	[...]																								
S	Spektrum von s	[...]																								
t	Zeit	[s]																								
T	Periode	[s]																								
m	m-te Periode	[1]																								
ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]																								
ω_c	Abtastfrequenz	[$\frac{1}{s}$]																								

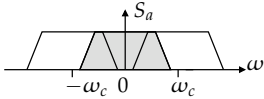
22.2 Flat Top Sampling

Signal wird verzerrt durch $G_\tau(\omega)$	$s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)r_\tau(t - mT)$ $S_a(\omega) = G_\tau(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)$ $G_\tau(\omega) = \frac{1}{T}R_\tau(\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\omega)}{\frac{\tau}{2}\omega}$ Je kürzer die Abtast-Pulse desto breiter die $\frac{\sin(x)}{x}$ Kurve.	<table> <tr> <td>s</td><td>Signal</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>s_a</td><td>s abgetastet</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>S</td><td>Spektrum von s</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td>t</td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>τ</td><td>Rechteckbreite</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td>m</td><td>m-te Periode</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ω</td><td>Kreisfrequenz</td><td>[$\frac{1}{s}$]</td></tr> </table>	s	Signal	[...]	s_a	s abgetastet	[...]	S	Spektrum von s	[...]	t	Zeit	[s]	T	Periode	[s]	τ	Rechteckbreite	[s]	m	m-te Periode	[1]	ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]
s	Signal	[...]																								
s_a	s abgetastet	[...]																								
S	Spektrum von s	[...]																								
t	Zeit	[s]																								
T	Periode	[s]																								
τ	Rechteckbreite	[s]																								
m	m-te Periode	[1]																								
ω	Kreisfrequenz	[$\frac{1}{s}$]																								

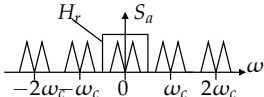
22.3 Sample and Hold

	Entspricht Flat Top Sampling (S. 166) bei $\tau = T$ Die $\frac{\sin(x)}{x}$ Kurve hat die Null-durchgänge bei $k\frac{2\pi}{T}, k = \{1, 2, \dots\}$	T Periode [s] τ Rechteckbreite [s]
---	--	---

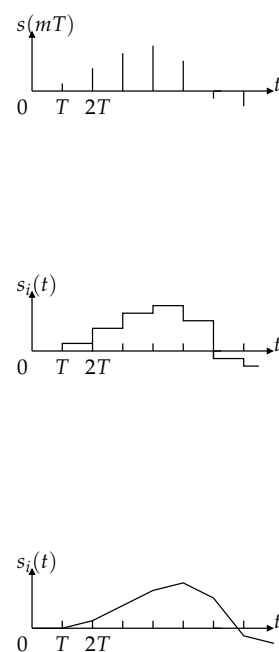
22.4 Abtasttheorem

Problem:  $\Rightarrow$ Rekonstruktion ist nicht möglich.	$\omega_c > 2\omega_{max}$ $\Rightarrow$ Praktisch muss immer ein analoger Tiefpass vorgeschaltet werden.	ω_c Abtastfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ ω_{max} max Frequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ in $s(t)$
---	--	--

22.5 Rekonstruktion

Ist das Abtasttheorem erfüllt, so ist das ursprüngliche Signal exakt reproduzierbar. 	$s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT) h_r(t - mT)$ $s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT) \delta(t - mT) * h_r(t)$ $h_r(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)}{\frac{\omega_c}{2}t}$	s_r Signal re-konst. [...] h_r Stossantw. Rekonstruktions-Tiefpass [...] t Zeit [s] T Periode [s] m m-te Periode [1] ω_c Abtastfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$
---	---	--

22.5.1 Interpolation

	$s_i(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h_i(t - mT)$ $S_i(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)H_i(\omega)$ Halteglied nullter Ordnung $h_i(t) = \text{Rechteck}, h = 1, \tau = T$ $H_i(\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} e^{-j\frac{T}{2}\omega}$ Lineare Interpolation $h_i(t) = \text{Dreieck}, h = 1, \tau = 2T$ $H_i(\omega) = T \left(\frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} \right)^2 e^{-jT\omega}$	s_i Signal interpoliert [...] h_i Interpolationsfunktion [1] t Zeit [s] T Periode [s] τ Pulsbreite [s] m, k m, k-te Periode [1] ω Kreisfrequenz [$\frac{1}{s}$] ω_c Abtastfrequenz [$\frac{1}{s}$]
---	--	---

22.6 Energie und Leistung bandbegrenzter Signale

Falls das Abtasttheorem, $T < \frac{1}{2}f_{max}$ eingehalten wird, hat das abgetastete Signal die selbe Energie bzw. Leistung wie das Original. Siehe Parsevalsches Theorem S. 186	$W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$ $W = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s^2(mT)$ $P = \frac{1}{T_{per}} \int_0^{T_{per}} s^2(t)dt$ $P = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s^2(mT)$ $N = \frac{T_{per}}{T}$	W Energie [Ws] P Leistung [W] s Signal [...] t Zeit [s] T Periode [s] T_{per} Periodenintervall [s] m m-te Periode [1] ω_c Abtastfrequenz [$\frac{1}{s}$] N Abtastwertzahl [1]
--	---	--

Teil VI

Mathematik

23 Grundlagen

23.1 Allgemeines

23.1.1 Binome

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\ & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\ & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\ & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\ & 1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1 \\ & 1 & & 11 & & 55 & & 165 & & 330 & & 462 & & 462 & & 330 & & 165 & & 55 & & 11 & & 1 \\ 1 & & 12 & & 66 & & 220 & & 495 & & 792 & & 924 & & 792 & & 495 & & 220 & & 66 & & 12 & & 1 \end{array}$$

23.1.2 Faktorzerlegungen

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

für n gerade:

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

für n ungerade:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$s^2 + 1 = (s-j)(s+j)$$

23.1.3 Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

23.1.4 Arithmetische Folge

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad d \text{ const.}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = n \frac{a_1 + a_n}{2} = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$$

23.1.5 Geometrische Folge

$$a_{n+1}/a_n = q, \quad q \text{ const.}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1$$

23.1.6 Partialbruchzerlegung

$$r(z) = \frac{r_1(z)}{(z-a)(z-b)^3((z-c)^2 + d^2)^3}$$

$$r(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta_1}{z-b} + \frac{\beta_2}{(z-b)^2} + \frac{\beta_3}{(z-b)^3} +$$

$$\frac{\gamma_1 z + \delta_1}{(z-c)^2 + d^2} + \frac{\gamma_2 z + \delta_2}{((z-c)^2 + d^2)^2} + \frac{\gamma_3 z + \delta_3}{((z-c)^2 + d^2)^3}$$

23.2 Matrizen und Determinanten

23.2.1 2×2 Matrizen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

Achtung: $AB \neq BA$!

Inverse: (falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

23.2.2 3×3 Matrizen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

23.2.3 Transponierte einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

23.3 Vektorrechnung

23.3.1 Grundlagen

Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = xy \cos \alpha$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Skalare Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$b_a = \vec{b} \vec{e}_a$$

Vektorielle Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$\vec{b}_a = b_a \vec{e}_a = (\vec{b} \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

Vektorprodukt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \alpha$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = \left[\det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Steigung eines Vektors

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\tan \alpha = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

23.3.2 Lineare Abbildungen

Drehung der XY-Ebene um den Ursprung mit Drehwinkel φ

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Spiegelung der XY-Ebene an der Geraden g durch den Ursprung mit den Steigungswinkel φ

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die X-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die Y-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die Z-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

23.4 Trigonometrie**23.4.1 Komplementwinkel**

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

23.4.2 Sinussatz

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

wobei r = Umkreisradius

23.4.3 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

23.5 Goniometrie

23.5.1 Serien (Lösungsmengen)

$$\alpha_1 = \arcsin x, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1$$

$$\alpha_{1n} = \alpha_1 + n2\pi, \quad \alpha_{2n} = \alpha_2 + n2\pi$$

$$\pm \alpha = \arccos x, \quad \alpha_n = \pm \alpha + n2\pi$$

$$\alpha_0 = \arctan x, \quad \alpha_n = \alpha_0 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

23.5.2 Potenzen

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} (\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8} (\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$$

23.5.3 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

23.5.4 Doppelwinkel

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - \sin^2(\alpha)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

23.5.5 Dreifachwinkel

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

23.5.6 Halbwinkel

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

23.5.7 Summen und Produkte

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

23.5.8 Genaue Funktionswerte

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

23.6 Logarithmen

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$$

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$$

$$\log(u^k) = k \log u$$

$$\log \sqrt[k]{u} = \frac{1}{k} \log u$$

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

23.7 Komplexe Zahlen

23.7.1 Allgemeines

$$j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad (-1)^j = (e^{j\pi})^j = e^{-\pi}$$

$$\underline{z} \in \mathbb{C}, \quad \bar{\underline{z}} : \text{konjugiertkomplex}$$

$$\text{karthesisch} : \underline{z} = a + jb, \quad \bar{\underline{z}} = a - jb$$

$$\text{polar} : \underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}, \quad \bar{\underline{z}} = r \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\underline{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \begin{cases} I. & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} \\ II. & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + \pi \\ III. & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + \pi \\ IV. & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + 2\pi \end{cases}$$

23.7.2 Rechenregeln

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = a_1 \pm a_2 + j(b_1 \pm b_2)$$

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = e^{\frac{1}{n} \ln \underline{z}} + (n-1) \text{ weitere Lösungen gleichmässig verteilt auf einem Kreis mit Radius } \sqrt[n]{r}$$

23.7.3 Euler

$$e^{\pm jkt} = \cos kt \pm j \sin kt$$

$$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k, \quad e^{t+j2\pi} = e^t$$

$$\cos kt = \frac{1}{2} (e^{jkt} + e^{-jkt})$$

$$\sin kt = \frac{1}{2j} (e^{jkt} - e^{-jkt})$$

$$\cosh kt = \frac{1}{2} (e^{kt} + e^{-kt})$$

$$\sinh kt = \frac{1}{2} (e^{kt} - e^{-kt})$$

23.8 Ableiten

23.8.1 Rechenregeln

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f'^{-1} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Elementare Funktionen

$$\text{pot}'_k x = k \text{pot}_{k-1} x$$

$$\sin' kx = k \cos kx$$

$$\cos' kx = -k \sin kx$$

$$\exp' kx = k \exp kx$$

$$\log' x = \frac{1}{x}$$

$$\ln' |f| = \frac{f'}{f}$$

$$(a^{kx})' = (k \ln a) a^{kx}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\cosh' x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh' x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Satz von Bernoulli und de l'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

23.9 Integrieren**23.9.1 Rechenregeln**

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

23.9.2 Substitution

$$\int f(x) dx$$

Aufstellen der Substitutionsgleichung:

$$u = g(x), \frac{du}{dx} = g'(x), dx = \frac{du}{g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad x = h(u), \frac{dx}{du} = h'(u), dx = \frac{h'(u)}{du}$$

($u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ müssen monotone Funktionen sein)

Substitution:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

Integration:

$$\int \varphi(u) du = \Phi(u)$$

Rücksubstitution:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

Beispiel:

$$\int_0^2 x \sqrt{3x^2 + 4} dx$$

$$\text{Subst: } u = 3x^2 + 4 \Leftrightarrow u' = \frac{du}{dx} = 6x$$

23 Grundlagen

Die neuen Grenzen erhalten wir durch Einsetzen der ursprünglichen Grenzen in die Substitutionsgleichung, die Rücksubstitution entfällt:

$$\begin{aligned} 2 &\mapsto 16 \\ 0 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_4^{16} \sqrt{u} \, du$$

23.9.3 Sätze

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_{-a}^{-b} f(-t) \, dt$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f(t) = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f(b) - \int_a^b f(a) = F(b) - F(a)$$

$$f \text{ stetig in } [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] \text{ mit } \int_a^b f = (b-a) f(\xi)$$

23.9.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen können integriert werden, indem man Division der Polynome durchführt

Beispiel: $\int \frac{x^2}{x^2+1}$

$$x^2 : (x^2 + 1) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = x + \arctan x$$

23.9.5 Rationalisierungsformeln

Für Rationale Funktionen von $\sin x$ und $\cos x$

- Beispiel

$$\int \frac{1 + \cos x}{\sin x} dx$$

- Substitution

$$u = \tan x/2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Weitere Rationalisierungsformeln siehe Papula Seite 148

23.9.6 Spezielle Integrale

$$\int \text{pot}_k = \frac{1}{k+1} \text{pot}_{k+1}$$

$$\int \exp kx dx = \frac{1}{k} \exp kx$$

$$\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \ln a} a^{cx}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \ln |x| dx = x (\ln |x| - 1)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln |x||$$

$$\int \log_a |x| dx = x (\log_a |x| - \log_a e)$$

$$\int x^k \ln x dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln x - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x|$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = \cos \frac{1}{x}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$$

$$\int (ax+b)^k \, dx = \frac{(ax+b)^{k+1}}{a(k+1)}, \quad k \neq -1$$

$$\int (ax^p+b)^k x^{p-1} \, dx = \frac{(ax^p+b)^{k+1}}{ap(k+1)}, \quad k \neq -1, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d|$$

$$\int \frac{x^{p-1}}{ax^p+b} \, dx = \frac{1}{ap} \ln |ax^p+b|, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d|$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2} dx = x - a \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\ln |1-x^2|$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{|a|}$$

$$\int e^{cx} \sin(ax+b) dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2} (c \sin(ax+b) - a \cos(ax+b))$$

$$\int e^{cx} \cos(ax+b) dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2} (c \cos(ax+b) + a \sin(ax+b))$$

$$\int \exp_k \sin_l dx = \frac{\exp_k}{l^2 - k^2} (jk \sin_l - l \cos_l)$$

$$\int \exp_k \cos_l dx = \frac{\exp_k}{l^2 - k^2} (jk \cos_l - l \sin_l)$$

$$\int x^n \sin kx dx = -\frac{x^n}{k} \cos kx + \frac{n}{k} \int x^{n-1} \cos kx dx \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^n \cos kx dx = +\frac{x^n}{k} \sin kx - \frac{n}{k} \int x^{n-1} \sin kx dx \quad n \in \mathbb{N}$$

24 Fourierreihen

24.1 Bezeichnungen

Vektorraum der trigonometrischen Polynome: $\mathbb{P} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{P} = \{a_0 \cos_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos_k + b_k \sin_k \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Vektorraum der Exponentialpolynome: $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{E} = \left\{ \sum_{k=-n}^m c_k \exp_k \mid c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\sin_k = \sin kt$$

$$\cos_k = \cos kt$$

$$\exp_k = e^{jkt}$$

24.2 Skalarprodukt

24.2.1 Eigenschaften

$$[a, b] = [b, a]$$

$$[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$$

$$[\lambda a, b] = \lambda [a, b]$$

$$[a, a] \geq 0 \quad [a, a] = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

24.2.2 Definitionen in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$

$$[f, g] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \quad f, g \in \mathbb{P} \text{ und STF}$$

$$[f, g] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \bar{g} \quad f, g \in \mathbb{E}$$

$$[f, g] = \overline{[g, f]} \quad f, g \in \mathbb{E}$$

24.2.3 Für orthonormierte Basis

$$[\cos_k, \sin_l] = 0 \quad k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}$$

$$[\cos_k, \cos_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

$$[\sin_k, \sin_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

$$[\exp_k, \exp_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

24.3 Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$

$$\|p\| = \sqrt{[p, p]} \quad p \in \mathbb{P} \text{ und STF}$$

$$\|p\|^2 = [p, p] = a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2$$

$$\|e\| = \sqrt{[e, e]} \quad e \in \mathbb{E}$$

$$\|e\|^2 = [e, e] = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

24.4 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$[f, g]^2 \leq [f, f] \cdot [g, g]$$

24.5 Abstand

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

24.6 Fourierreihe reell**24.6.1 Fourierkoeffizienten**

$$a_k = [f, \cos_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad f \in \text{STF}$$

$$b_k = [f, \sin_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad b_0 = 0$$

gerade Funktion:

$$g(-t) = g(t) \Rightarrow b_k = 0$$

ungerade Funktion:

$$u(-t) = -u(t) \Rightarrow a_k = 0$$

24.6.2 Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{P}$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos_k + b_k \sin_k)$$

$$\cos_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a_0 = [f, \cos_0] \quad b_0 = 0$$

24.7 Fourierreihe komplex**24.7.1 Fourierkoeffizienten**

$$c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \quad c_{-k} = \overline{c_k}$$

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k) \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k) = c_k + c_{-k}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + j b_k) \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k) = j (c_k - c_{-k})$$

$$c_k = [f, \exp_k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \exp_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt$$

24.7.2 Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{E}$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp_k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \exp_k + c_{-k} \exp_{-k})$$

24.8 Parsevalsches Theorem

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n (a_k \cos_k + b_k \sin_k) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (a_k^2 + b_k^2) = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Leistung periodischer Signale:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

24.9 Durchgang durch LTI-System

gegeben: $f(t) = c_k e^{jkt} + c_{-k} e^{-jkt} = a_k \cos_k + b_k \sin_k$; $H(\omega)$

gesucht: $T(f(t)) = \tilde{f}$

$$\tilde{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} H(k)$$

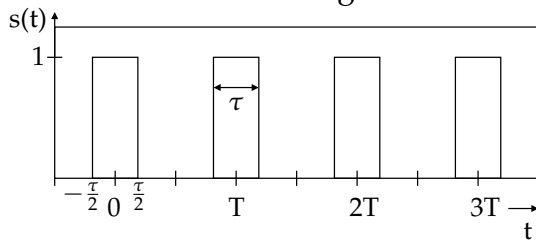
$$\tilde{a}_k = \operatorname{Re}(H(k)(a_k - j b_k))$$

$$\tilde{b}_k = -\operatorname{Im}(H(k)(a_k - j b_k))$$

$$\tilde{f} = \tilde{a}_k \cos_k + \tilde{b}_k \sin_k$$

24.10 Fourierkoeffizienten wichtiger periodischer Signale

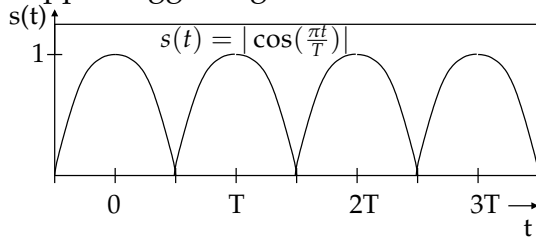
Periodische Rechteckfolge



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

$$b_n = 0$$

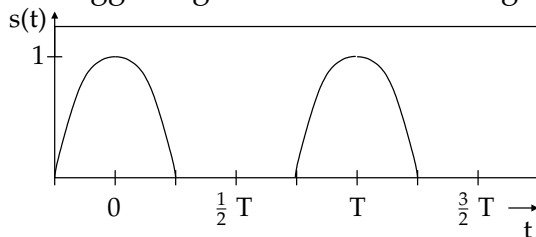
Doppelweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$b_n = 0$$

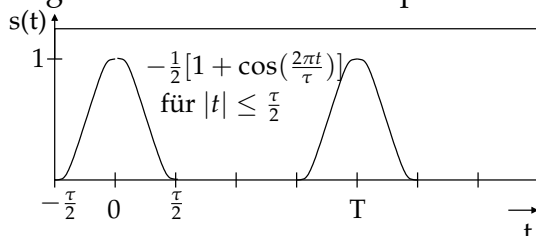
Einweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1 - n^2}$$

$$b_n = 0$$

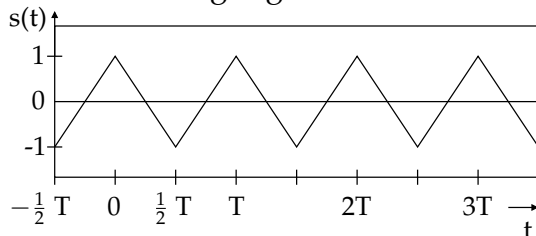
Folge von Raised-Cosine-Impulsen



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{2T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} \frac{1}{1 - \left(\frac{n\tau}{T}\right)^2}$$

$$b_n = 0$$

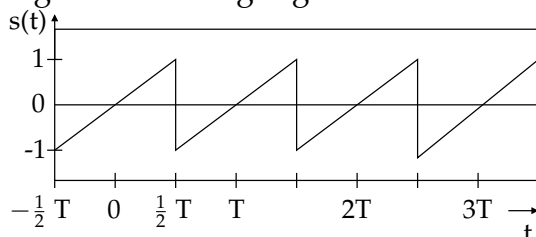
Dreieckschwingung DC-frei



$$c_n = a_n = \frac{2[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^2}, \quad c_0 = 0$$

$$b_n = 0$$

Sägezahnschwingung DC-frei



$$c_n = -jb_n, \quad c_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

25 Fouriertransformation

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{f} = f * h \\
 \mathcal{F} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
 F & \xrightarrow{\quad} & \tilde{F} = F \cdot H
 \end{array}$$

25.1 Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Wichtig: Sonderfälle beachten! (Division durch 0 in der Lösung separat behandeln)

25.2 Fourier-Cosinustransformation

Für gerade Funktionen

$$\mathcal{F}_c(f(t)) = F_c(\omega), \quad \mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)) = f(t)$$

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$$F = 2F_c$$

25.3 Fourier-Sinustransformation

Für ungerade Funktionen

$$\mathcal{F}_s(f(t)) = F_s(\omega), \quad \mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\omega)) = f(t)$$

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{j}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$$

$$F = -2jF_s$$

25.4 Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$f * g = g * f \quad (f * g) * k = f * (g * k)$$

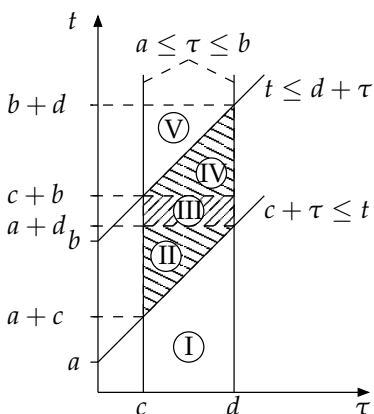
$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = F \cdot G$$

25.4.1 Fallunterscheidung bei Definitionsbereichen

$$p(t) = (f * g)$$

$$D(g(t)) = [a|b]$$

$$D(f(t)) = [c|d]$$



1. Fall: $c + b < a + d$

I	$t < a + c:$	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t < b + c:$	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
III	$b + c \leq t < a + d:$	$p(t) = \int_a^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
IV	$a + d \leq t < b + d:$	$p(t) = \int_{t-d}^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
V	$b + d \leq t:$	$p(t) = 0$

2. Fall: $c + b > a + d$

I	$t < a + c:$	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t < a + d:$	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
III	$a + d \leq t < b + c:$	$p(t) = \int_{t-d}^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
IV	$b + c \leq t < b + d:$	$p(t) = \int_{t-d}^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
V	$b + d \leq t:$	$p(t) = 0$

3. Fall: $c + b = a + d$

III	$a + d = t = b + c:$	$p(t) = p(a + d)$
-----	----------------------	-------------------

25.5 Eigenschaften

$t \mapsto f(t)$	$\omega \mapsto \overline{F(-\omega)}$
$t \mapsto f(-t)$	$\omega \mapsto F(-\omega)$
$t \mapsto f(at)$	$\omega \mapsto \frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$t \mapsto f(t - t_0)$	$\omega \mapsto F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t} f(t)$	$\omega \mapsto F(\omega - \omega_0)$
$t \mapsto F(t)$	$\omega \mapsto 2\pi f(-\omega)$
$t \mapsto f^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n F(\omega)$
$t \mapsto (-jt)^n f(t)$	$\omega \mapsto F^{(n)}(\omega)$
$t \mapsto \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega} F(\omega)$

25.6 Fouriertransformationen mit Diracdelta

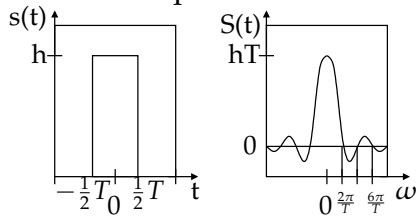
<i>Funktion</i>	<i>Fourier – Transformierte</i>
$t \mapsto \delta(t)$	$\omega \mapsto 1$
$t \mapsto 1$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega)$
$t \mapsto \delta(t - t_0)$	$\omega \mapsto e^{-j\omega t_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t}$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$t \mapsto \sin(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$t \mapsto \cos(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
$t \mapsto \delta^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n$
$t \mapsto \text{sign}(t)$	$\omega \mapsto \frac{2}{j\omega}$
$t \mapsto \frac{1}{\pi t}$	$\omega \mapsto -j\pi \text{sign}(\omega)$
<i>us</i>	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

Faltung mit Dirac:

$$(f(t) * \delta(t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt = f(t_0)$$

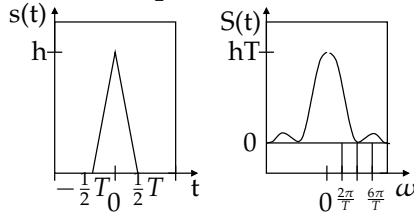
25.7 Fouriertransformationen wichtiger Impulse

Rechteckimpuls



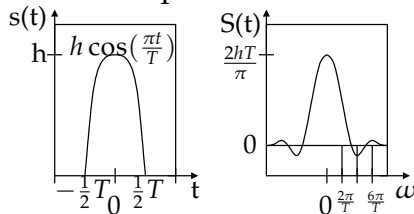
$$S(\omega) = hT \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\left(\frac{T\omega}{2}\right)}$$

Dreieckimpuls



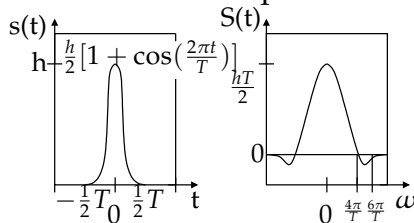
$$S(\omega) = \frac{hT}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{4}\right)}{\frac{T\omega}{4}} \right]^2$$

Cosinusimpuls



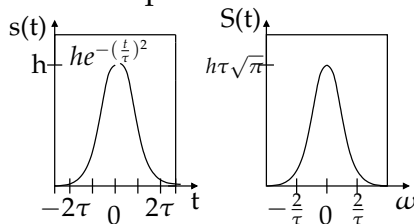
$$S(\omega) = \frac{2hT}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{1 - \left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2}$$

Raised-Cosine-Impuls



$$S(\omega) = \frac{hT}{2} \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\frac{T\omega}{2} \left[1 - \left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)^2 \right]}$$

Gauss-Impuls



$$S(\omega) = h\tau\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}}$$

26 Laplace

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{f} = f * g \\
 \mathcal{L} \downarrow & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\
 F & \xrightarrow{\quad} & \tilde{F} = F \cdot G
 \end{array}
 \quad G = \frac{1}{\text{cp}(s)}$$

26.1 Laplacetransformation

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s), \quad \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), \quad s \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad \text{falls } t \geq 0$$

$$f(t) = 0, \quad \text{falls } t < 0$$

26.2 Rechenregeln

$$\begin{array}{ll}
 t \mapsto f(at) & s \mapsto \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \\
 t \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) & (s \mapsto F(as)) \\
 t \mapsto u(t-a) \cdot f(t-a) & s \mapsto e^{-as} F(s) \quad a > 0 \\
 t \mapsto f(t+a) & s \mapsto e^{as} \left(F(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right) \quad a > 0 \\
 t \mapsto e^{-bt} f(t) & s \mapsto F(s+b) \quad c \in \mathbb{C} \\
 t \mapsto f'(t) & s \mapsto sF(s) - f(0) \\
 t \mapsto f^{(2)}(t) & s \mapsto s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \\
 t \mapsto f^{(3)}(t) & s \mapsto s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f^{(2)}(0) \\
 t \mapsto f^{(n)}(t) & s \mapsto s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) \\
 t \mapsto -t f(t) & s \mapsto F'(s) \\
 t \mapsto +t^2 f(t) & s \mapsto F^{(2)}(s) \\
 t \mapsto -t^3 f(t) & s \mapsto F^{(3)}(s) \\
 t \mapsto (-1)^n t^n f(t) & s \mapsto F^{(n)}(s) \\
 t \mapsto \int_0^t f(\tau) d\tau & s \mapsto \frac{1}{s} F(s)
 \end{array}$$

26.3 Spezielle Laplacetransformationen

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{d} e^{ct} \sin ct\right) = \frac{1}{(s-c)^2 + d^2}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{ct} \left(\frac{c}{d} \sin dt + \cos dt\right)\right) = \frac{s}{(s-c)^2 + d^2}$$

26.4 Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$f * g = g * f \quad f(t) = g(t) = 0 \quad \text{falls } t < 0$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = F \cdot G$$

Die Fallunterscheidung bei eingeschränkten Definitionsbereichen der Funktionen ist die selbe wie bei der Fourier-Theorie in Abschnitt 25.4.1 auf S. 189

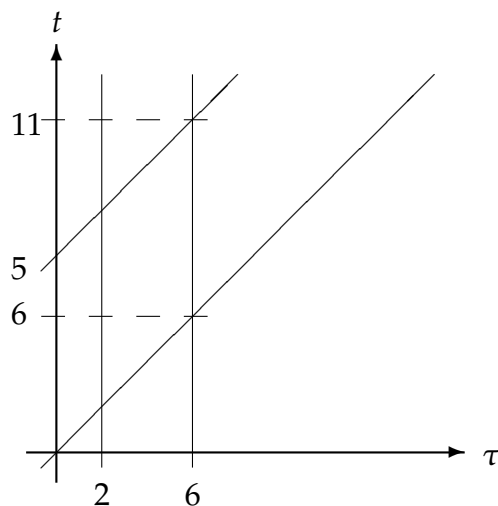
Beispiel:

Geg: $g(t) = u(t) - u(t - 5)$ und $f(t) = u(t - 2) - u(t - 6)$

Ges: $\tilde{f} = (f * g)(t)$

$$\tilde{f} = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$g(t - \tau) = 1 \quad \text{falls} \quad 0 \leq t - \tau \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \leq t \leq 5 + \tau$$



26.5 Periodische Funktionen

f auf einer Periode T vorgeben.

$$F(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

Periodische Fortsetzung:

$$F_{per}(s) = F(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

27 Differentialgleichungen

27.1 1. Ordnung

27.1.1 Homogene

Separierbar

Praktisches Vorgehen beim Lösen der separierbaren Differentialgleichungen:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\Leftrightarrow h(y) dy = g(x) dx \Leftrightarrow \int h(y) dy = \int g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow H(y) = G(x) + c$$

Wenn durch ein Ausdruck, der die unbekannte Funktion enthält zu dividieren ist, so ist zu prüfen ob sein Verschwinden eine Lösung der DGL ergibt.

Substitution

Gegeben:

$$y'(x) = (x + y(x))^2$$

Substitution:

$$z = x + y(x) \Rightarrow z' = 1 + y'(x) \Leftrightarrow y'(x) = z' - 1$$

Einsetzen:

$$z' - 1 = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - z^2} dz = dx \Rightarrow \text{separierbar}$$

27.1.2 Partikuläre

$$\text{DGL: } y' + y = q$$

Ansatz

Ansatz für partikuläre Lösung: «Ähnlich» wie die Störfunktion (q), jedoch nicht in der homogenen Lösung enthalten.

Störfunktion	Ansatz
$\sin t, \cos t$	$a \sin t + b \cos t$
e^{-t}	$a e^{-t}$
$t e^{-t}$	$a e^{-t} + b t e^{-t}$
t	$at + b$

Ansatz in DGL einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen.

Variation der Konstanten

Homogene Lsg: $y_h = c p(x)$

Ansatz: $y_p = g(x) p(x)$ (c wird durch $g(x)$ ersetzt)

Ansatz in DGL einsetzen und nach $g(x)$ auflösen

27.1.3 Lösung

Gesamtlösungsmenge: $y = y_h + y_p$

27.2 Höhere Ordnung

27.2.1 Homogen, linear mit konstanten Koeffizienten

DGL: $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 22y'' + 30y' + 13y = 0$

$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom: $p(t) = t^4 + 6t^3 + 22t^2 + 30t + 13$

$\Leftrightarrow p(t) = (t + 1)^2(t + 2 - 3j)(t + 2 + 3j)$

$\mathbb{N}(p) = \{-1; -1; -2 + 3j; -2 - 3j\}$

Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich die Lösungen.

Ordnung DGL = Anzahl Lösungen

$$y_1(t) = e^{-t} \quad y_2(t) = t e^{-t} \quad y_3(t) = e^{t(-2+3j)} \quad y_4 = e^{t(-2-3j)}$$

Linearkombinationen aus Lösungen komplexer Nullstellen ergibt reelle Lösungen:

$$\frac{1}{2} (y_3(t) + y_4(t)) = e^{-2t} \cos 3t$$

$$\frac{1}{2j} (y_3(t) - y_4(t)) = e^{-2t} \sin 3t$$

27.2.2 Partikuläre

Ansatz

$\Rightarrow$ Siehe 27.1.1 Homogene S. 195

Variation der KonstantenStörfunktion: $q(x)$ Homogene Lsg: $y_1(t) \quad y_2(t)$ Ansatz: $y_p = g_1(t) y_1(t) + g_2(t) y_2(t)$ $\Rightarrow$ Gleichungssystem:

$$g_1'(t) y_1(t) + g_2'(t) y_2(t) = 0$$

$$g_1'(t) y_1'(t) + g_2'(t) y_2'(t) = q(x)$$

Dieses Gleichungssystem liefert $g_1(t)$ und $g_2(t)$ **27.3 Laplace****27.3.1 Lineare Übertragung**Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{\text{cp}(s)}$ Stossantwort: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \tilde{u}'$ wobei cp = Charakteristisches Polynom und $\tilde{u}$ = Sprungantwort

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y^{(2)}(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n)}(0) = 0$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q$$

 $\Downarrow \mathcal{L}$

$$Y(s) \cdot \text{cp}(s) = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{\text{cp}(s)} = F(s) \cdot G(s)$$

 $\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = (f * g)(t)$$

Beispiel:

$$y^{(2)} + 5y' + 6y = u, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

 $\Downarrow \mathcal{L}$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 5s + 6) = Y(s) \cdot (s + 2)(s + 3) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2} + \frac{\gamma}{s+3}$$

$$1 = \alpha(s+2)(s+3) + \beta(s+3)s + \gamma(s+2)s$$

$$s = 0: \quad 1 = 6\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

$$s = -2: \quad 1 = -2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

$$s = -3: \quad 1 = 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+3}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right) u(t)$$

27.3.2 Nichtlineare Übertragung

Beispiel: Geg: $g(t) = 1 - \cos t$

Ges: $\tilde{v}$ auf $v = \sin t$

mit $\tilde{v}''(0) = 1$, $\tilde{v}'(0) = 0$, $\tilde{v}(0) = 0$

$$g(t) = 1 - \cos t$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^3+s} = \frac{1}{cp(s)}$$

$$\Rightarrow \text{DGL: } y^{(3)} + y' = \sin t$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

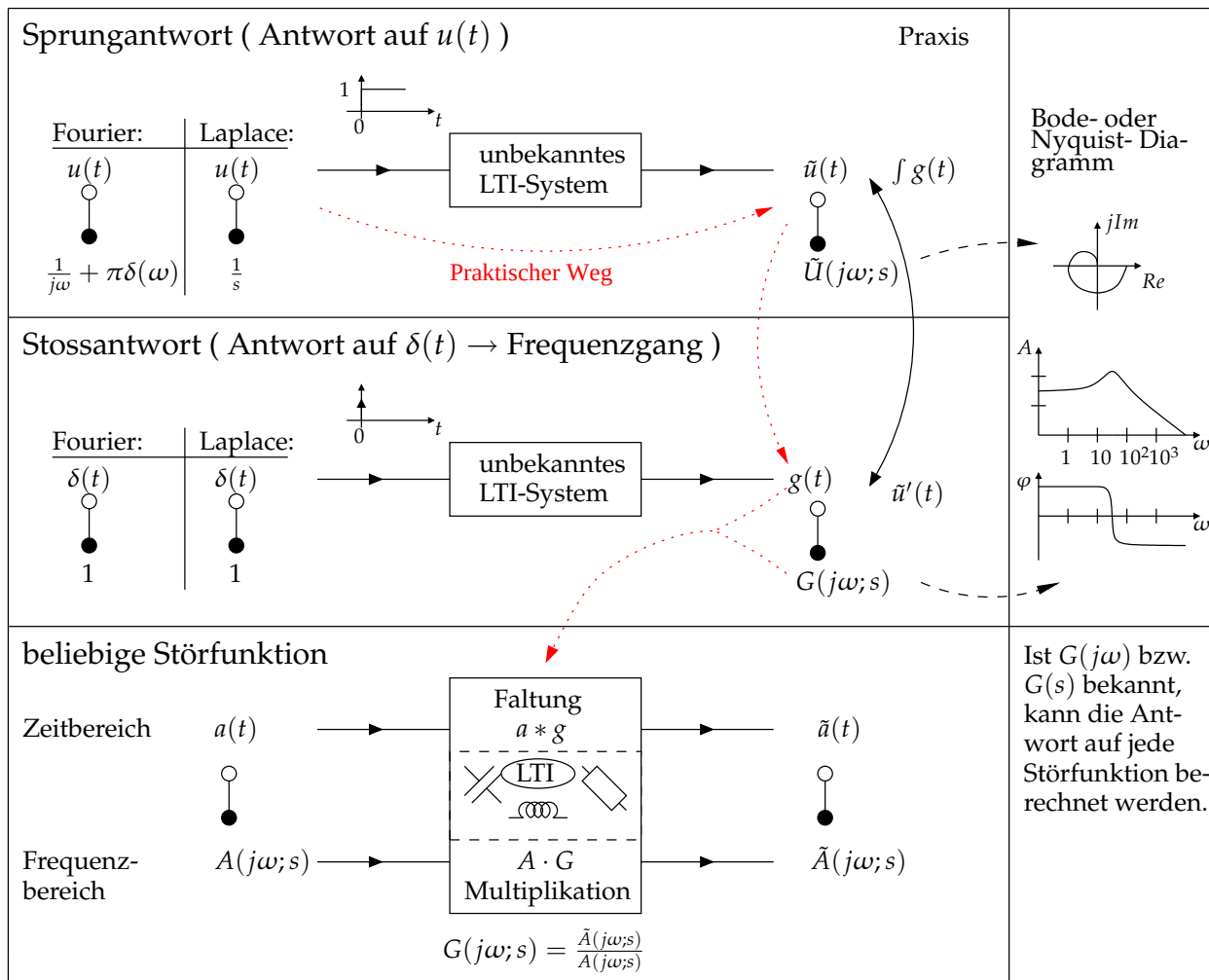
$$s^3 Y(s) - 1 + s Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow Y(s)(s^3+s) = \frac{1}{s^2+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3+s} \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^3+1}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = (g * \sin)(t) + g(t)$$

27.4 Übersicht Laplace und Fourier



28 Funktionsdiskussion

28.1 Funktionen mit einer Variablen

28.1.1 Zu beantwortende Fragen

1. Definitionsbereich $D(f)$
2. Bild von f
3. Hat der Graph von f , $G(f)$ Symmetrien?
Gerade $f(-x) = f(x)$ oder Ungerade $f(-x) = -f(x)$
4. Gibt es Polstellen?
5. Gibt es Gebiete der Koordinatenebene wo der Graph keine Punkte hat?
(Achtung beim kürzen)
6. Gibt es Schranken für die Funktionswerte?
7. Welches sind die Nullstellen von f ?
8. Welches sind die Nullstellen der Ableitungen von f ?
9. Wo steigt f , wo fällt f ?
10. Gibt es Grenzwerte für Argumente gegen $\pm\infty$?
11. Gibt es Asymptoten?

$$m = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \quad q = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Asymptote: $mx + q$

Bei Brüchen mit Polynomen ergibt eine Division mit Rest die Asymptote:
Beispiel:

$$(x^3 - 4x^2 - 17x + 60) \div (x^2 - 4) = \underbrace{x - 4}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{44 - 13x}{x^2 - 4}}_{\text{Rest}}$$

Die Nullstellen des Zählerpolynoms im Rest ergeben die Schnittpunkte zwischen der Asymptote und der Funktion.

12. Gibt es absolute Maximal- oder Minimalstellen?

28.1.2 Gerade (2-Punkte-Form)

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

28.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Gerade $Ax + By + C = 0$, Punkt $P = (p_1, p_2)$

$$d = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

28.2 Funktionen mit mehreren Variablen**28.2.1 Bezeichnungen**

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Richtungsvektoren an die Parameterlinien

Richtungsvektor an die Abszissenlinie: $(1, 0, f_1(x, y))$

Richtungsvektor an die Ordinatenlinie: $(0, 1, f_2(x, y))$

Tangentialebene

$$\varepsilon: \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (x, y, f(x, y)) + \alpha(1, 0, f_1(x, y)) + \beta(0, 1, f_2(x, y))$$

$$\vec{n}_\varepsilon = (f_1(x, y), f_2(x, y), -1)$$

Gradient

Wir betrachten die Funktion $f: (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$. Sie ist in einer gewissen Umgebung U von (x_0, y_0) definiert.

Die Richtung des stärksten Anstiegs von f in (x_0, y_0) ist

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = \vec{v}$$

($\Rightarrow$ Richtung der Fallgeraden in der Grundrissebene)

Richtungsvektor der Fallgerade der Tangentialebene:

$$(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), f_1(x_0, y_0)^2 + f_2(x_0, y_0)^2)$$

Richtungsableitung

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \text{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}_{\vec{v}}$$

wobei $\vec{e}_{\vec{v}}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$ ist

Totales Differential

$$df = h \cdot f_1(x, y) + k \cdot f_2(x, y)$$

wobei h und k die Inkremente sind

Kettenregel

Vollständig differenzierbare Funktionen:

$$f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

$$u : (y_1, y_2) \mapsto u(y_1, y_2)$$

$$v : (y_1, y_2) \mapsto v(y_1, y_2)$$

$$\tilde{f} : (y_1, y_2) \mapsto f(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2))$$

Dann sind

$$\tilde{f}_1(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_1(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_1(y_1, y_2)$$

$$\tilde{f}_2(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_2(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_2(y_1, y_2)$$

28.3 Kegelschnitte

28.3.1 Kreis

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$M = (x_0, y_0)$$

28.3.2 Ellipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$M = (x_0, y_0)$$

28.3.3 Hyperbel

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$M = (x_0, y_0)$$

28.3.4 Parabel

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

$$S = (x_0, y_0)$$

Index

- Überdruck, 31
- Überlagerungsprinzip, 76
- 2×2 Matrizen
 - Matrizen und Determinanten, 171
- 3×3 Matrizen
 - Matrizen und Determinanten, 172
- Abbildungen, 4
- Ableiten, 177
 - Bernoulli, de l'Hospital, 179
 - Elementare Funktionen, 178
 - Rechenregeln, 177
- Absoluter Druck, 31
- Abtasttheorem, 167
- Abtastung, 166
 - Abtasttheorem, 167
 - Energie, 168
 - Flat Top Sampling, 166
 - Ideale, 166
 - Interpolation, 168
 - Leistung, 168
 - Real, 166, 167
 - Rechteckpuls, 166, 167
 - Rekonstruktion, 167
 - Sample and Hold, 167
- AC-Verstärker, 143
- Addierer, 150, 151
- Additionstheoreme, 175
- adiabatisch, 52
- Admittanz, 106, 110
- Antriebstechnik, 120
- Aperiodische Schwingung, 61
- Arbeit, 21
 - Beschleunigungs-, 22
 - Expansions-, 52
 - Hub-, 22
 - Kompressions-, 52
 - Reibungs-, 23
 - Spann-, 22
 - Verformungs-, 23
- Aufleiten, 179
 - Rechenregeln, 179
 - Sätze, 180
 - Spezielle Integrale, 181
- Auftrieb, 32
- Ausdehnung
 - Längen-, 41
 - Volumen-, 41
- Austausch von Wärmemengen, 44
- Austrittsgeschwindigkeit, 38
- Basisschaltug, 136
- Bernoulli, 179
- Beschleunigte Bewegung, 16
- Beugung, 69
 - Am Gitter, 70
 - Am Spalt, 69
 - kreisförmige Öffnung, 69
- Bewegung der Planeten, 27
- Biasstrom, 158
- Biegung
 - Balken, 15
- Binom, 170
- Biot-Savart, 87
- Bipolar Tansistor, 136
- Blindleistung, 104
- Bodediagramm, 112
- Brechung, 2
- Carnotprozess, 54
- Cauchy-Schwarzsche, 185
- Common Mode Error, 156
- Cosinuswerte, 176
- Crestfaktor, 103
- Dämpfung, 117
- Dampfdruck, 44
- Debye-Temperetur, 44
- Deformierbare Körper, 31
- Deformierung, 13
- Dehnung, 13

- Dezibel, 149
- Dichte, 21
- Differential Gleichungen, 195
 - 1.Ordnung, 195
 - Hohere Ordnung, 196
 - Homogen, linear, konst, 196
 - Homogene, 195
 - Partikulare, 195, 196
- Differentieller UI-Wandler, 153
- Differenzieren, 177
 - Bernoulli, de l'Hospital, 179
 - Elementare Funktionen, 178
 - Rechenregeln, 177
- Digital
 - Abtastung, 166
 - Sampling, 166
- Digitale Signalverarbeitung, 165
- Diode, 132, 146
 - übergangsbereich, 130
 - AC-Analyse, 131
 - Arbeitspunktberechnung, 129
 - DC-Analyse, 131
 - Differentieller Widerstand, 130
 - Durchbruchbereich, 130
 - Durchlassbereich, 130
 - Grosssignalanalyse, 131
 - ideale, 129
 - Kennlinie, 130
 - Kleinsignalanalyse, 131
 - Konstantspannungsmodell, 129
 - Spannungsstabilisierung, 132
 - Sperrbereich, 130
 - Temperaturkoeffizient, 132
 - Z-Diode, 132
- Diracdelta, 190
- Doppelwinkel, 175
- Doppler-Effekt, 65
 - Akustischer, 65
 - Optischer, 65
- Drehbewegung, 17
- Drehimpuls, 24
- Drehmoment, 12, 127
- Drehstrom, 120
 - Synchrongenerator, 127
- Dreieckschaltung, 121
- Dreifachwinkel, 175
- Dreiphasen, 120
- Dreiphasensysteme, 120
- DriftGeschwindigkeit, 72
- Druck, 31
 - Absoluter, 33
 - Dampfdruck, 44
 - Differenzen, 34
 - Dynamischer, 33
 - Gesamt, 34
 - Schmelzdruck, 44
 - Statischer, 33
- Druck auf Rohrwand, 33
- Druckmessung, 33
- Druckwandler, 32
- DSG, 127
 - Stabilität, 127
- Durchflutung, 90
- Dynamik, 20
- Effektivwert, 104
- Eigenschwingungen, 68
- Einstein, 23
- Einzelkraft, 12
- El. Arbeit, 72
- El. Leistung, 72
- Elastischer Stoss, 25
- Elektronendichte, 72
- Elektrischer Schwingkreis, 61
- Elektrizitätslehre
 - Überlagerungsprinzip, 76
 - Arbeit, 72
 - DriftGeschwindigkeit, 72
 - Elektronendichte, 72
 - Elementarladung, 72
 - Feldstärke, 72
 - Gleichstrom, 74
 - Kirchoff, 74
 - Knotensatz, 74
 - Knotenspannungsmethode, 77
 - Kreisströme, 77
 - Kreisstrom-Methode, 77
 - Ladung, 72
 - Leistung, 72
 - Leistungsanpassung, 77
 - Leitwert, 72
 - Maschensatz, 74
 - Netzwerkanalyse, 75
 - Netzwerkumwandlung, 75
 - Nichtlinear, 77

- Quellen, 74
 - gesteuerte, 79
 - Mehrere, 75
- Quellenumwandlung, 76
- Quellenverschiebung, 78
- Spannung, 72
- Spannungsgesetz, 74
- Spannungsquelle, 74
- spez. Leitwert, 72
- Spez. Widerstand, 72
- Stern – Dreieck, 76
- Strom, 72
- Stromdichte, 72
- Stromgesetz, 74
- Stromquelle, 75
- Superposition, 76
- Thévenin, 77
- Trennspannungen, 77
- Widerstand, 72
- Wirkungsgrad, 77
- Elektromotor, 122
- Elektronik, 129
- Elektrostatik, 82
 - Allgemein, 82
 - Das Coulombsche Gesetz, 82
 - Energie, 85
 - Homogenes Feld, 84
 - Kräfte, 85
 - Anziehung, 86
 - Verschiebung, 86
 - Paralleldrahtleitung, 85
 - Räumliches Zentralfeld, 83
 - Zylindrisches Zentralfeld, 84
- Elementarladung, 72
- Elliptische Spiegel, 4
- Emitterfolger, 136
- Emitterschaltung, 135
- Energie, 21, 105, 168
 - Expansions-, 52
 - Kernbindungs-, 23
 - Kinetische-, 22
 - Kompressions-, 52
 - Potentielle-, 22
 - Reibungs-, 23
 - Rotations-, 22
 - Spann-, 22
 - Strahlung, 48
- Energietechnik, 120
- Enthalpie, 53
- Entropie, 55
- Euler, 177
- Expansion, 52
- Faktorzerlegungen, 170
- Feder, 14, 22
- Feldeffekt Transistor, 148
- Feldstärke, 72
- Fernrohre, 10
- Fet
 - AC-Verstärker, 143
 - DC-Berechnung, 141
 - Diode, 146
 - Drainschaltung, 144
 - Fet-Typen, 137
 - Gateschaltung, 144
 - Gleichstrom, 141
 - Innenwiderstände, 145
 - Kleinsignal Ersatz, 140
 - MOS-Diode, 146
 - MOSFET
 - ideal, 138
 - real, 139
 - Schalter, 142
 - Sourceschaltung, 143
 - Stromquelle, 147
 - Geregelte Kaskode, 148
 - Kaskode, 147
 - Kaskode geregelt, 148
 - Stromspiegel
 - Widlar, 148
 - VCR, 145
 - Widerstand, 145
- Fet-Typen, 137
- Flüssigkeiten, 31
- Fluchtgeschwindigkeit, 28
- Fluide, 31, 34
 - Überdruck, 31
 - Absoluter Druck, 31
 - Auftrieb, 32
 - Druck, 31
 - Absoluter, 33
 - Differenzen, 34
 - Dynamischer, 33
 - Gesamt, 34
 - Statischer, 33

- Druckmessung, 33
- Druckwandler, 32
- Grenzflächeneffekte, 34
- Grenzflächenspannung, 35
- Hydrodynamik, 36
- Hydrostatik, 32
- Kapillarität, 35
- Kompression, 31
- Kontinuitätsgleichung, 36
- Kraftwandler, 32
- Manometer, 33
- Schweredruck, 32
- Strömung
 - Dynamischer Auftrieb, 39
 - Formen, 37
 - Laminare, 38
 - Newtonsches Reibungsgesetz, 37
 - Raynolds-Zahl, 37
 - Reale, 37
 - Tragflügel, 40
 - Turbulent, 39
 - Volumenstrom, 38
 - Vortizität, 37
 - Zirkulation, 37
- Folge
 - Aritmetische, 171
 - Geometrische, 171
- Fotoapparat, 7
- Fourier
 - Bezeichnungen, 184
 - Cauchy-Schwarzsche, 185
 - Cosine Folge, 187
 - Cosine-Impuls, 191
 - Cosinus-Impuls, 191
 - Cosinustransformation, 188
 - Diracdelta, 190
 - Doppelweg Gleichgerichtet, 187
 - Dreieck Folge, 187
 - Dreieck-Impuls, 191
 - Einweg Gleichgerichtet, 187
 - Exp. Polynome, 184
 - Faltung, 189
 - Funktion $f \in \mathbb{E}$, 186
 - Funktion $f \in \mathbb{P}$, 186
 - Impulse, 191
 - Koeffizienten, 185
 - Koeffizienten komplex, 186
 - Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$, 185
 - Orthonormierte Basis, 185
 - Rechteck-Impuls, 191
 - Rechtecksignal, 187
 - Reihe komplex, 186
 - Reihe reel, 185
 - Reihen, 184
 - Sägezahn Signal, 187
 - Skalarprodukt, 184
 - Transformation, 188
 - trig. Polynome, 184
- Fourierreihe, 184
- Freier Fall, 18
- Funktionsdiskussion, 200
 - Bezeichnungen, 201
 - Funktionen mit einer Variablen, 200
 - Funktionen mit mehreren Variablen, 201
- Gase
 - Gemische, 42
 - Ideal, 42
 - Kinetische Gastheorie, 46
 - Mittlere freie Weglänge, 47
 - Reale, 43
 - Wärmeleitung, 47
- GBP, 159, 163
- Gedämpfte Schwingung, 60
- Gegeninduktivität, 92
- Gegenkopplung, 160
- Gegenkopplungsarten, 161
- Gemische idealer Gase, 42
- Generator, 122, 126
 - Inselbetrieb, 126
 - Synchron, 127
- Generator am starren Netz, 127
- Generatoren, 122
- Geometrische Optik, 2
- Geostationär, 28
- Geregelte Kaskode, 148
- Getriebe, 29
- Gewichtskraft, 21
- Gleichförmige Bewegung, 16
- Gleichgewichtsbedingung, 11
- Gleichstrom, 74
- Gleichstrommaschine, 123
 - Fremderregt, 123
 - Nebenschluss, 124, 125
 - Nutzbremmung, 124

- Gleichtaktfehler, 156
- Goniometrie, 174
 - Additionstheoreme, 175
 - Doppelwinkel, 175
 - Dreifachwinkel, 175
 - Genaue Funktionswerte, 176
 - Halbwinkel, 175
 - Logarithmen, 176
 - Potenzen, 174
 - Summe und Produkte, 175
- Gravitation, 27
- Gravitationsfeld, 28
- Gravitationsgesetz, 27
- Grenzflächeneffekte, 34
- Grenzflächenspannung, 35
- Grundlagen
 - Grundgrößen, 72, 79
 - Vektorrechnung, 172
- Haftreibung, 11
- Halbwinkel, 175
- Harmonische Welle, 64
- Horizontaler Wurf, 19
- Hospital, 179
- Hydrodynamik, 36
- Hydrostatik, 32
- Hyperbolische Spiegel, 4
- I-Glied, 113
- ideale Diode, 129
- Ideale Gase, 42
- Idealer OP, 149
- Impedanz, 106, 110
- Impedanztransformation, 110
- Impuls, 24
- Impulse, 191
- Induktionsgesetz, 94
- induktive Kopplung, 92
- Induktivität, 91
 - Drahtschleife, 98
 - Kreisrahmenspule, 101
 - Paralleldrahtleitung, 99
 - Ringspule, Toroid, 101
- Induktivitäten, 108
 - Parallelschaltung, 95
 - Serieschaltung, 95
- inelastischer Stoss, 25
- Inselbetrieb, 126
- Instabilität, 117
- Instrumentationsverstärker, 151
- Integrieren, 179
 - Integration rationaler Funktionen, 180
 - Rechenregeln, 179
 - Sätze, 180
 - Spezielle Integrale, 181
 - Substitution, 179
- Intensität, 63
- Interferenz, 66
- Isobar, 43
- isobar, 51
- Isochor, 43
- isochor, 51
- isotherm, 51
- k-Wert, 50
- Kapazitäten, 107
- Kapillarität, 35
- Kaskode, 147
- Kaskode geregelt, 148
- Kepler-Gesetze, 27
- Kinematik, 16
 - Beschleunigte Bewegung, 16
 - Drehbewegung, 17
 - Freier Fall, 18
 - Horizontaler Wurf, 19
 - Kreisbewegung, 17
 - Schiefer Wurf, 19
 - Senkrechter Wurf, 18
 - Winkelbeschleunigung, 17
 - Winkelgeschwindigkeit, 17
 - Wurfbahnen, 18
 - Zentripetalbeschleunigung, 18
- Kinetische Gastheorie, 46
 - Mittlere freie Weglänge, 47
- Kirchoff, 74
- Knotensatz, 74
- Knotenspannungsmethode, 77
- Kollektorschaltug, 136
- Komparator, 153
- Komplexe Zahlen, 176, 177
 - Euler, 177
- Kompression, 14, 31
- Komression, 52
- Konkavspiegel, 5
- Kontinuitätsgleichung, 36
- Konvexspiegel, 5

- Kräfte im Magnetfeld, 88
- Kräftepaar, 12
- Kraftwandler, 32
- Kreisbewegung, 17
- Kreisprozess, 53
- Kreisströme, 77
- Kreisstrom-Methode, 77
- Kreisstrommethode, 111
- Kurvendiskussion, 200

- Ladung, 72
- Laplace, 192
 - Lineare Übertragung, 197
 - Nichtlineare Übertragung, 198
- Laplacetransformation
 - Faltung, 194
 - Periodische Funktionen, 194
 - Rechenregeln, 193
 - Spezielle, 193
- Leistung, 23, 104, 168
- Leistung bei Sternschaltung, 121
- Leistungsanpassung, 77, 104
- Leitwert, 72
- Lichtwellenleiter, 3
- Lineare Abbildungen
 - Vektorrechnung, 173
- Linsen, 6
- Linsensysteme, 6
- Linsentypen, 6
- Luftfeuchtigkeit, 45
- Lupe, 8

- Machscher Kegel, 66
- Magetismus
 - Energiedichte, 93
- Magn. Widerstand, 91
- Magnetismus, 72
 - Brechung, 92
 - Durchflutung, 90
 - Energie, 93
 - Feldstärke, 87
 - Koaxialkabel, 99
 - Kreisförmiger Leiter, 98
 - Kurzer, gerader Leiter, 97
 - Langer gerader Leiter, 97
 - Voller Leiter, 98
 - Zylinderspule, 100
 - Fluss, 90
- Flussdichte, 88
- Gegeninduktivität, 92
- Induktionsgesetz, 94
- induktive Kopplung, 92
- Induktivität, 91
- Kräfte, 88
- Nichtlinearität, 96
- Ohmsches Gesetz, 91
- Permeabilität, 87
- Selbstinduktion, 94
- Spulenfluss, 91
- Trafogleichungen, 95
- Widerstand, 91

- Manometer, 33
- Maschenmethode, 111
- Maschensatz, 74
- Masse, 27
- Massenträgheit, 29
- Massenträgheit (tabelle), 30
- Mathematik, 170
- Matrix
 - Transponierte, 172
- Matrizen und Determinanten, 171
- Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, 47

- Membrane, 69
- Mikroprojektor, 8
- Mikroskop, 9
- Mischtemperatur, 44
- Mitkopplung, 160
- Mittel- und Kennwerte, 102
- MOS-Diode, 146
- Motor, 122
- Motoren, 122, 165
 - Gleichstrom, 123

- Nebenschlussmaschine, 124, 125
- Netzwerkanalyse, 75
- Netzwerkumwandlung, 75
- Newtonsches Reibungsgesetz, 37
- Nichtlinear, 77
- Nichtlinearität, 96
- Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$, 185
- Nullstelle, 116
- Nyquistdiagramm, 112

- Offsetfehler, 157
- Ohm, 107

- Operationsverstärker, 150, 159
 - Übertragungskennlinie, 156
 - Addierer, 150, 151
 - Ausgangsspannungsbereich, 156
 - Bandbreite, 159
 - Beschaltung mit Zweitor, 155
 - Biasstrom, 158
 - Common Mode Error, 156
 - Differentieller UI-Wandler, 153
 - Differenzverstärker, 151
 - Dynamischer Eingangswiderstand, 158
 - Eingangsströme, 158
 - Fehler, 156
 - Frequenzgang, 159
 - GBP, 159
 - Geschlossene Verstärkung, 157
 - Gleichtaktfehler, 156
 - Idealer-, 149
 - Invertierender Verstärker, 155
 - Komparator, 153
 - Offsetfehler, 157
 - Oszillator, 154
 - Power supply error, 157
 - Realer, 156
 - Schmitt-Trigger, 153
 - Spannungsfolger, 150
 - Statische Fehler, 158
 - Stromquelle, 152
 - Stromspiegel, 152
 - Subtrahierer, 151
 - Transitfrequenz, 159
 - Versorgungsspannungsfehler, 157
 - Verstärker
 - Invertierend, 150
 - Nicht Invertierend, 150
 - Verstärkungsbandbreitenprodukt, 159
 - Wien-Robinson Oszillator, 154
- Optik, 2
 - Abbildungen, 4
 - Brechung, 2
 - Elliptische Spiegel, 4
 - Fernrohre, 10
 - Fotoapparat, 7
 - Hyperbolische Spiegel, 4
 - Konkavspiegel, 5
 - Konvexspiegel, 5
 - Lichtwellenleiter, 3
 - Linsen, 6
 - Linsensysteme, 6
 - Linsentypen, 6
 - Lupe, 8
 - Mikroprojektor, 8
 - Mikroskop, 9
 - Parabolspiegel, 4
 - Planspiegel, 5
 - Prisma, 3
 - Projektor, 7
 - Reflexionsgesetz, 2
 - Sammellinse, 6
 - Sphärische Spiegel, 5
 - Spiegel, 4
 - Totalreflexion, 3
 - Zerstreuungslinse, 7
- Optische Weglänge, 67
- Orthonormierte Basis, 185
- Ortskurve, 112
- Oszillator, 154
- P-Glied, 113
- Parabolspiegel, 4
- Parsevalsches Theorem, 186
- Partialbruchzerlegung, 171
- Pascal Dreieck, 170
- Pendel
 - Drehpendel, 58
 - Federpendel, 58
 - Mathematisches Pendel, 59
 - Physikalisches Pendel, 59
- Permeabilität, 87
- Pfeife, 68
- Phasenübergänge, 44
- Physik, 2
- Planeten-Bewegung, 27
- Planspiegel, 5
- Pol-Nullstellendiagramm, 116
- Polstelle, 116
- Potentielle Energie, 28
- Prisma, 3
- Projektor, 7
- Proportionalglied, 113
- PT₁-Glied, 114, 117
- PT₂-Glied, 114, 117
- Quadratische Gleichung, 171
- Quellen, 74

- gesteuerte, 79
- Mehrere, 75
- Quellenumwandlung, 76
- Quellenverschiebung, 78
- Querkontraktion, 14
- Rückkopplung, 160
- Raketenantrieb, 25
- Rationalisierungsformeln, 181
- Raynolds-Zahl, 37
- Reaktionsprinzip, 12
- Realer OP, 156
- Reflexionsgesetz, 2
- Reibungsarbeit, 23
- Reibungskraft, 21
- Reihen
 - Fourier, 184
- Ringring, 117
- RMS, 103
- RMS-Wert, 104
- Rotation, 26
- Saite, 68
- Sammellinse, 6
- Sample and Hold, 167
- Sampling, 166
- Scheinleistung, 104
- Schiefer Wurf, 19
- Schleifenverstärkung, 163
- Schmelzdruck, 44
- Schmitt-Trigger, 153
- Schraubenfeder, 14
- Schubbeanspruchung, 14
- Schweredruck, 32
- Schwerpunkt, 13
- Schwingen, 117
- Schwingung
 - Aperiodische Schwingung, 61
 - Gedämpfte Schwingung, 60
- Schwingungen, 56
 - aperiodische Schwingung, 57
 - Drehpendel, 58
 - Elektrischer Schwingkreis, 61
 - Federpendel, 58
 - freie Schwingung, 56
 - Harmonische Schwingung, 56
 - Mathematisches Pendel, 59
 - periodische Schwingung, 57
 - Physikalisches Pendel, 59
 - Ungedämpfte Schwingung, 56
- Selbstinduktion, 94
- Senkrechter Wurf, 18
- Sensitivität, 163
- Sinuswerte, 176
- Skalare Projektion
 - Vektorrechnung, 172
- Skalarprodukt
 - Vektorrechnung, 172
- Spannung, 13, 72
 - an Grenzflächen, 35
- Spannungsfolger, 150
- Spannungsgesetz, 74
- Spannungsquelle, 74
- Spannungsstabilisierung, 132
- spez. Leitwert, 72
- Spez. Widerstand, 72
- Sphärische Spiegel, 5
- Spiegel, 4
- Spulenfluss, *siehe* Magnetismus
- Standardterm, 113
 - Aufwärtsknick, 115
 - Dämpfung, 117
 - I-Glied, 113
 - Instabilität, 117
 - P-Glied, 113
 - PT₁-Glied, 114, 117
 - PT₂-Glied, 114, 117
 - Quadratisch, 114, 116
 - Ringring, 117
 - Schwingen, 117
 - Totzeitglied, 115
- Starre Körper im Gleichgewicht, 11
- Statik, 11
- Statischer Auftrieb, 32
- Stehende Welle, 67
- Stern – Dreieck, 76
- Sternschaltung, 120
- Stochastische Signale, 165
- Stoss
 - elastisch, 25
 - inelastisch, 25
- Strömung
 - Austrittsgeschwindigkeit, 38
 - Dynamischer Auftrieb, 39
 - Formen, 37

- Laminare, 38
- Newtonsches Reibungsgesetz, 37
- Raynolds-Zahl, 37
- Reale, 37
- Tragflügel, 40
- Turbulent, 39
- Volumenstrom, 38
- Vortizität, 37
- Zirkulation, 37
- Strömungsfeld
 - Allgemein, 80
 - Leistung, 81
 - Leistungsdichte, 81
 - Räumliches Zentralfeld, 80
 - Zylindrisches Zentralfeld, 81
- Strömungsformen, 37
- Strahlung
 - Gesetze-, 48
 - Temperatur-, 48
 - Wärme, 49
- Strahlungsenergie, 48
- Strom, 72
- Stromdichte, 72
- Stromgesetz, 74
- Stromquelle, 75, 147, 152
 - Geregelte Kaskode, 148
 - Kaskode, 147
 - Kaskode geregelt, 148
- Stromspiegel, 152
 - Widlar, 148
- Subtrahierer, 151
- Superposition, 76
- Symetrischer Eingang, 151
- Synchrongenerator, 126, 127
- Tangenswerte, 176
- Tansistor
 - Bipolar, 136
- Temperatur, 41
 - Celcius, 41
 - Debeye-, 44
 - Fahrenheit, 41
 - Kelvin, 41
- Temperaturstrahlung, 48, 49
- Thévenin, 77
- Totalreflexion, 3
- Totzeitglied, 115
- Trafogleichungen, 95
- Tragflügel, 40
- Transistor
 - Basisschaltug, 136
 - DC-Ersatzschaltung, 134
 - Dynamische Innenwiderstände, 134
 - Emitterfolger, 136
 - Emitterschaltug, 135
 - Arbeitspunkt, 135
 - Feldeffekt, 148
 - Funktionsweise, 133
 - Idealer, 134
 - Kollektorschaltug, 136
 - NPN, 133
 - PNP, 133
 - Unipolar, 148
 - Verstärkerschaltungen, 134
- Transitfrequenz, 163
- Translation, 26
- Transponierte, 172
- Trennbündelmethode, 111
- Trennspannungen, 77
- Trigonometrie, 173
 - Cosinussatz, 174
 - Komplementwinkel, 173
 - Sinussatz, 174
- VCR, 145
- Vektorielle Projektion
 - Vektorrechnung, 172
- Vektorprodukt
 - Vektorrechnung, 172
- Vektorrechnung, 172
- Versorgungsspannungsfehler, 157
- Verstärker, 160, 163
 - Ausgangsschaltungen, 162
 - Eingangsschaltungen, 162
 - GBP, 163
 - Gegenkopplung, 160
 - Invertierend, 150
 - Mitkopplung, 160
 - Nicht Invertierend, 150
 - Rückkopplung, 160
 - Schleifenverstärkung, 163
 - Transitfrequenz, 163
- Verstärkung, 149
- Verstärkungs Bandbreiten Produkt, 163
- Verstärkungsbandbreitenprodukt, 159
- Vierpole, 155

Vortizität, 37

Vorwort, i

Wärme, 43

 Austausch-, 44

 Energie, 43

 Molare-, 44

Wärmeaustausch, 49

Wärmebedarf eines Gebäudes, 50

Wärmelehre, 41

Wärmeleitung in Gasen, 47

Wärmetransport, 50

Wechselstrom

 Betragsmittelwert, 102

 Formfaktor, 103

 Halbwellenmittelwert, 102

 Linearer Mittelwert, 102

 Mittel- und Kennwerte, 102

 Quadratischer Effektivwert, 103

 zusammeng. Sign., 103

 Quadratischer Mittelwert, 103

 Quadratischer RMS, 103

 RMS, 103

 Scheitelfaktor, 103

Wechselstrom

 Admittanz, 106

 Blindleistung, 104

 Bodediagramm, 112

 Standardterm, 113

 Darstellungsformen, 112

 Energie, 105

 Impedanz, 106

 Impedanztransformation, 110

 Induktivitäten, 108

 Kapazitäten, 107

 Kreistrommethode, 111

 Leistung, 104

 Leistungsanpassung, 104

 Maschenmethode, 111

 Nyquistdiagramm, 112

 Ortskurve, 112

 Scheinleistung, 104

 Transformation ZY, 110

 Trennbündelmethode, 111

 Widerstand, 107

 Z und Y-Ebene, 110

Wechselstrom

 RMS, 103

Welle

 Überlagerung, 66

 Beugung, 69

 Am Gitter, 70

 Am Spalt, 69

 kreisförmige Öffnung, 69

 Doppler-Effekt

 Akustischer, 65

 Optischer, 65

 Eigenschwingung, 68

 Harmonische, 64

 Intensität, 63

 Interferenz, 66

 Kapillarwelle, 62

 Longitudinalwelle, 62

 Machscher Kegel, 66

 Membrane, 69

 Optische Weglänge, 67

 Phasensprung, 66

 Räumliche Ausbreitung, 64

 Schallwelle, 62

 Schwerewelle, 62

 Seilwelle, 62

 Stehende, 67

 Transversalwelle, 62

 Wellengleichung, 63

Wellengeschwindigkeiten, 62

Wellengleichung, 63

Wellenlehre, 62

Widerstand, 72, 107

Widlar, 148

Wien-Robinson Oszillator, 154

Winkelbeschleunigung, 17

Winkelgeschwindigkeit, 17

Wirkungsgrad, 24, 77

 Carnot, 54

Wurfbahnen, 18

Z-Diode, 132

Zeigerdarstellung, 109

Zentralmasse, 28

Zentripetalbeschleunigung, 18

Zerstreuungslinse, 7

zurückgeführte Energie, 55

Zustandsänderungen, 51

 adiabatisch, 52

 isobar, 51

 isochor, 51

isotherm, 51
Zweitore, 155