Für die Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ gilt:

1) g und h meiden sich, d. h. haben keinen gemeinsamen Punkt.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{v} = \vec{q} + s\vec{w}$ hat keine Lösung $(r; s)$.

In diesem Fall gilt weiter:

g und h parallel $\Leftrightarrow$ $\vec{v}, \vec{w}$ kollinear

g und h windschief $\Leftrightarrow$ $\vec{v}, \vec{w}$ nicht-kollinear

2) g und h schneiden sich in einem Punkt.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{v} = \vec{q} + s\vec{w}$ hat genau eine Lösung $(r; s)$.

3) g und h fallen zusammen, d. h. sind die gleichen Geraden.

$\Updownarrow$ ∞

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{v} = \vec{q} + s\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s)$.

Vektor zwischen zwei Punkten

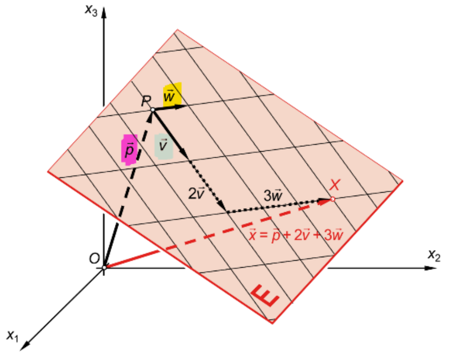
Endpunkt – Anfangspunkt = Vektor

Q – A = $\overrightarrow{AQ}$

* Gleichungssystem hat keine Lösung:

– Parametergleichung der Ebene

–



$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$

$\vec{p}$ = Ortsvektor

$\vec{v}$ & $\vec{w}$ = Spannvektor

r & t = Parameter

Für zwei Ebenen $E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j}$ und $F: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ gilt:

1) E und F sind parallel (und fallen nicht zusammen).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat keine Lösung $(r; s; t; u)$.

2) E und F schneiden sich in einer Geraden.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t; u)$, wobei genau *einer* der Parameter r, s, t, u frei gewählt werden kann.

3) E und F fallen zusammen (d. h. stellen die *gleiche* Ebene dar).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} + s\vec{j} = \vec{q} + t\vec{v} + u\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t; u)$, wobei genau *zwei* der Parameter r, s, t, u frei gewählt werden können.

Für die Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{i}$ und die Ebene $E: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ gilt:

1) g ist parallel zu E (und liegt nicht in E).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat keine Lösungen $(r; s; t)$.

2) g und E schneiden sich in einem Punkt (dem Durchstosspunkt).

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat genau eine Lösung $(r; s; t)$.

3) g liegt in E.

$\Updownarrow$

Das Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{i} = \vec{q} + s\vec{v} + t\vec{w}$ hat beliebig viele Lösungen $(r; s; t)$.

Koordinatengleichung

Grundform: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Von der Parameter – zur Koordinatengleichung

Gegeben sei die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wir schreiben diese Vektorgleichung als Gleichungssystem und wenden darauf das Gauss'sche Verfahren an:

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r - 3s + x_1 = -2 \\ -2r + 2s + x_2 = 2 \\ -3r + 2s + x_3 = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r - 3s + x_1 = -2 \\ -4s + 2x_1 + x_2 = -2 \\ -7s + 3x_1 + x_3 = -5 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1') = (1) \\ (2') = 2 \cdot (1) + (2) \\ (3') = 3 \cdot (1) + (3) \end{array}$$

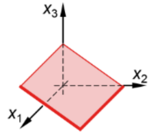
$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r - 3s + x_1 = -2 \\ -4s + 2x_1 + x_2 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1'') = (1') \\ (2'') = (2') \\ (3'') = 7 \cdot (2') - 4 \cdot (3') \end{array}$$

Diskussion von Spezialfällen der Koordinatengleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$:

a) $a_1 = 0$ (d. h. $a_2x_2 + a_3x_3 = b$)

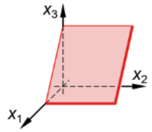
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.

[Da x_1 in der Gleichung nicht auftritt, ist mit jedem Punkt auch gleich eine ganze Parallele zur x_1-Achse durch diesen Punkt Lösung der Koordinatengleichung $a_2x_2 + a_3x_3 = b$.]



b) $a_2 = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_3x_3 = b$)

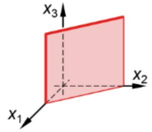
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse.



c) $a_3 = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_2x_2 = b$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.

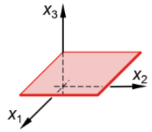
Senkrecht auf grundebene



d) $a_1 = a_2 = 0$ (d. h. $a_3x_3 = b$)

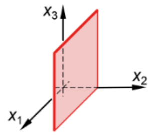
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1x_2-Koordinatenebene.

[Die Ebene ist nämlich gemäss a) und b) parallel zur x_1-Achse *und* x_2-Achse]



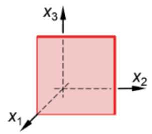
e) $a_1 = a_3 = 0$ (d. h. $a_2x_2 = b$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_1x_3-Koordinatenebene.



f) $a_2 = a_3 = 0$ (d. h. $a_1x_1 = b$)

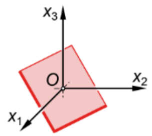
$\Leftrightarrow$ Die Ebene ist parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene.



g) $b = 0$ (d. h. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$)

$\Leftrightarrow$ Die Ebene enthält den Ursprung O des Koordinatensystems.

$[a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0]$



Achsenabschnittsgleichung Ebene

$X = (x_1; x_2; x_3)$ liegt in der Ebene mit den drei nicht-verschwindenden Achsenabschnitten p_1, p_2, p_3.

$\Updownarrow$

$(x_1; x_2; x_3)$ erfüllt die Gleichung $\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 1$.

Beispiel

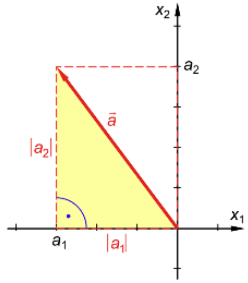
$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 18$

Achsenabschnittsgleichung:

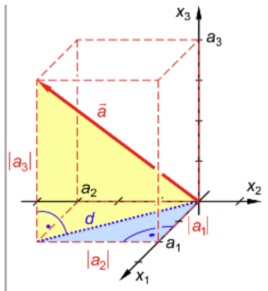
$\frac{3x_1}{\cancel{18}_{6}} + \frac{6x_2}{\cancel{18}_{3}} + \frac{4x_3}{\cancel{18}_{\frac{9}{2}}} = \frac{18}{18} \Rightarrow E: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4,5} = 1$

Bedingungen:
- Vorzeichen muss positiv sein
- Es muss = 1 stehen
- x_1 / x_2 / x_3 müssen alleine stehen

Längenmessungen:



$|\vec{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$



$|\vec{a}|^2 = d^2 + |a_3|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Vektorlänge:

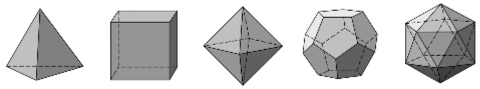
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Abstand zweier Punkte:

Abstand $|\overline{PQ}|$ zweier Punkte $P = (p_1; p_2)$ bzw. $(p_1; p_2; p_3)$ und $Q = (q_1; q_2)$ bzw. $(q_1; q_2; q_3)$:

$|\overline{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$ bzw. $|\overline{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$.

Die 5 Platonischen Körper



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

Bei diesen Körpern sind alle Seiten gleich gross. einen 6. Körper gibt es nicht.

Vektorbeträge erfüllen folgende Gesetze:

(I)	$\lvert\vec{a}\rvert \geq 0$	$(= 0$ nur für $\vec{a} = \vec{0})$
(II)	$\lvert r \cdot \vec{a}\rvert = \lvert r\rvert \cdot \lvert\vec{a}\rvert$	$(r \in \mathbb{R})$
(III)	$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert \leq \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$	(„Dreiecksungleichung“)

Winkelhalbierende

Um den Winkel zu besimmen müssen die Richtungsvektoren gleich lang sein (Einheitsvektoren)

Anleitung:

1.) Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen (Hierfür die Geraden gleichsetzen)

Beispiel:

$g = \binom{0}{4} + r\cdot\binom{1}{0}$ $\quad h = \binom{-1}{0} + s\cdot\binom{3}{4}$

$\left| \begin{array}{l} r = -1 + 3s \\ 4 = 4s \end{array} \right| \rightarrow \underline{s=1}$

Ortsvektor zum Schnittpunkt: $\binom{-1}{0} + 1\cdot\binom{3}{4}$

Schnittpunkt: $\binom{-1}{0} + 1\cdot\binom{3}{4} = \binom{2}{4}$

2.) Einheitsvektoren aus den Richtungsvektoren kreieren

Beispiel:

$g = \binom{0}{4} + r\cdot\binom{1}{0}$ $\quad h = \binom{-1}{0} + s\cdot\binom{3}{4}$

Richtungsvektoren

↳ Einheitsvektoren: $\left|\binom{1}{0}\right| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$\left|\binom{3}{4}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

also: $1\cdot\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$

$\frac{1}{5}\cdot\binom{3}{4} = \binom{3/5}{4/5}$

3.) Winkelhalbierende kreieren

$\vec{x}_\omega = \vec{p} + k\cdot\vec{v}$

Ortsvektor $\vec{p}$: Aus Schritt 1 $\vec{0S} = \binom{2}{4}$

Richtungsvektor $\vec{v}$: Einheitsvektoren aus 2. Addieren und Subtrahieren

$\vec{V}_1^{+} = \binom{1}{0} + \binom{3/5}{4/5} = \binom{1+3/5}{4/5} = \binom{8/5}{4/5} = \frac{4}{5}\binom{2}{1}$

$V_2^{-} = \binom{1}{0} - \binom{3/5}{4/5} = \binom{1-3/5}{-4/5} = \binom{2/5}{-4/5} = \frac{2}{5}\binom{1}{-2}$

$\Rightarrow \vec{x}_{1\omega} = \binom{2}{4} + t\cdot\binom{2}{1}$

$\Rightarrow \vec{x}_{2\omega} = \binom{2}{4} + u\cdot\binom{1}{-2}$

Winkel wird mit folgender Formel berechnet

$\boxed{\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)}$ mit $\vec{a}\bullet\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ bzw. $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Skalarprodukt

$\vec{a}\bullet\vec{b} = 0$ bedeutet $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind senkrecht zueinander $\perp$

a) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ gleichgerichtet,	d.h. $0° = \sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
b) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ spitz,	d.h. $0° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 90°$	$\Leftrightarrow$	$0 < \vec{a}\bullet\vec{b} < |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
c) $\vec{a}\perp\vec{b}$,	d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90°$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}\bullet\vec{b} = 0$
d) $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ stumpf,	d.h. $90° < \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) < 180°$	$\Leftrightarrow$	$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| < \vec{a}\bullet\vec{b} < 0$
e) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ gegengerichtet,	d.h. $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180°$	$\Leftrightarrow$	$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \vec{a}\bullet\vec{b}$

man kann mit quadrieren von Vektoren auf Zahlen springen und wieder zurück

$\vec{a}^2 := \vec{a}\bullet\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

Projektionen

Projektionen werden z.B. dazu benutzt um Abstände von einem Punkt zu einer Geraden herauszufinden.

Es sei $\vec{a}\ (\neq\vec{0})$ ein gegebener Vektor. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{x}$ die Zerlegung $\vec{x} = \vec{x}_{\|\vec{a}} + \vec{x}_{\perp\vec{a}}$, wobei

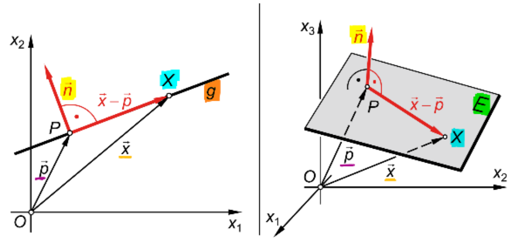
$\vec{x}_{\|\vec{a}} = (\vec{x}\bullet\vec{e}_{\vec{a}})\cdot\vec{e}_{\vec{a}}$ parallel zu $\vec{a}$ und

$\vec{x}_{\perp\vec{a}} = \vec{x} - (\vec{x}\bullet\vec{e}_{\vec{a}})\cdot\vec{e}_{\vec{a}}$ senkrecht zu $\vec{a}$ liegt.

Die Normalgleichung

Man braucht die Normalgleichung um herauszufinden ob ein Punkt X in der Ebene E bzw. auf der Geraden g liegt

Hierfür wird der Normalvektor benötigt, der senkrecht zu E bzw. g liegt



Normalgleichung: $\boxed{\vec{n}\bullet(\vec{x}-\vec{p}) = 0}$

- Geht die Gleichung auf liegt X in der Ebene bzw. auf der Geraden
- Durch die Normalgleichung können wir auch auf die Koordinatengleichung gelangen

Beispiel:

Die Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ durch den Punkt $P=(4;1;6)$ hat die Normalengleichung

$$\vec{n}\bullet[\vec{x}-\vec{p}] = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\bullet\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \text{oder ausmultipliziert}$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}, \text{ d.h. } 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2\cdot4 + 5\cdot1 + (-1)\cdot6 = 7.$$

Für die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ist $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

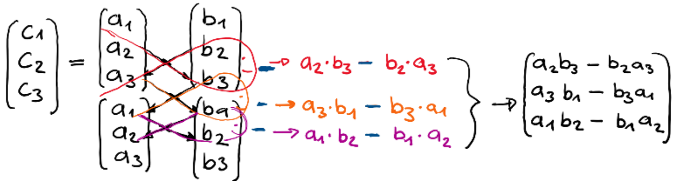
Für die Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ist $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Das Kreuzprodukt

- Gibt an, Welcher Vektor senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Ist nur für zwei 3-Dimensionale Vektoren definiert

$\boxed{\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

Merkregel: Fischli :)



- Man kann auch die Koordinatengleichung erörtern

Beispiel:

Wir rechnen das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren aus.

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$ ich kenne einen Punkt auf E: $(\overset{x_1}{2}; \overset{x_2}{-1}; \overset{x_3}{3}) \in E$

$\Rightarrow$ E: $-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$

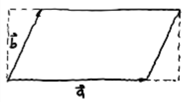
(I) $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(II) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin[\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})]$, das heisst:

Die Länge des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(III) Für nicht-kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt:

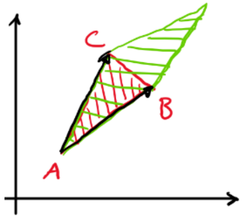
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



$\vec{a}, \vec{b}$ kollinear $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ Kreuzprodukt $= 0 \rightarrow$ Vektoren sind parallel

Beispielaufgabe für Regel (II)

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC mit den Ecken $A=(1;\ 1)$, $B=(3;\ 3)$, $C=(2;\ 5)$.



$\vec{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

↓ 3. Dimension

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$

$F=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right|=\underline{\underline{3}}$

– Zahl

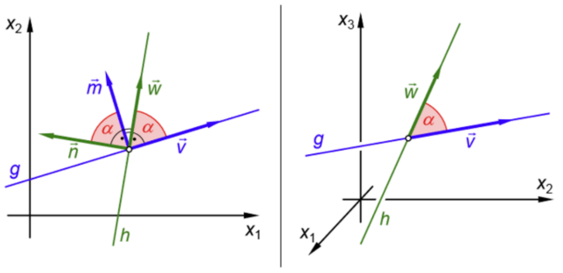
(I) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})=:-\vec{b}\times\vec{a}$ (Anti-Kommutativgesetz)

(II) $(r\cdot\vec{a})\times\vec{b}=r\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(r\cdot\vec{b})$ $(r\in\mathbb{R})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

(III) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=:\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (Distributivgesetz bezüglich
$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})=:\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ Vektoraddition „+")

Schnittwinkel:

Schnittwinkel zweier Geraden

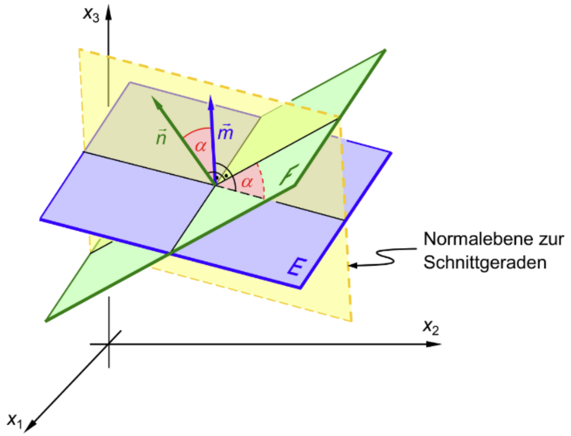


Der spitze Schnittwinkel α zweier sich schneidenden Geraden

- $g:\ \vec{x}=\vec{p}+r\vec{v}$ und $h:\ \vec{x}=\vec{q}+s\vec{w}$ beträgt $\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right)$,
- $g:\ m_1x_1+m_2x_2=b$ und $h:\ n_1x_1+n_2x_2=c$ beträgt $\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right)$.

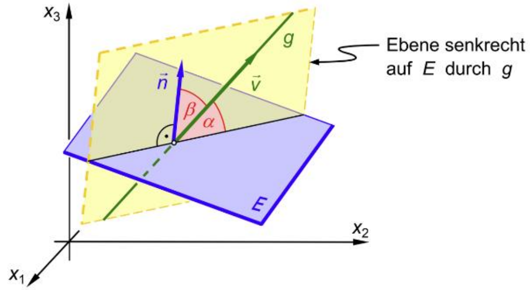
Schnittwinkel zweier Ebenen:

Der Schnittwinkel liegt in der senkrecht auf der Schnittgeraden stehenden Ebene.



Der spitze Schnittwinkel α zweier Ebenen $E:\ m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=b$ und $F:\ n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=c$ beträgt $\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right)$.

Schnittwinkel einer Geraden und einer Ebene:



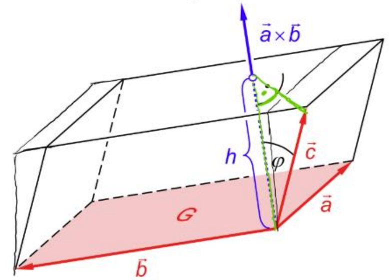
Analog oben gilt für den spitzen Winkel $\beta=\sphericalangle(\vec{v};\vec{n})$

$$\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\cos(\beta)=\cos(90°-\alpha)=\sin(\alpha).$$

Der spitze Schnittwinkel α einer Geraden $g:\ \vec{x}=\vec{p}+r\vec{v}$ und einer Ebene $E:\ n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=b$ beträgt $\alpha=\arcsin\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right)$.

Das Spatprodukt

Volumen berechnung

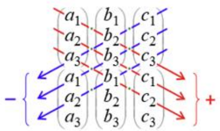


$$V=\underbrace{\text{Grundfläche } G}_{|\vec{a}\times\vec{b}|}\cdot\underbrace{\text{Höhe } h}_{|\vec{c}|\cdot\cos(\varphi)}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\varphi)=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

gemäss Satz $\boxed{26}$. Man nennt deshalb $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ das **Spatprodukt** (oder auch **gemischte Produkt**) der drei Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, abgekürzt $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

Spatprodukt: $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$ oder $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

Determinante $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$. Merkregel:



$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1,$$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ komplanar → auf gleicher Ebene

$\vec{a}\perp\vec{b}$	(senkrecht)	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\vec{a}\parallel\vec{b}$	(kollinear)	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$	komplanar	$\Leftrightarrow$	$[\vec{a};\vec{b};\vec{c}]=0$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$	Rechtssystem	$\Leftrightarrow$	$[\vec{a};\vec{b};\vec{c}]>0$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$	Linkssystem	$\Leftrightarrow$	$[\vec{a};\vec{b};\vec{c}]<0$