Zusammenfassung AN2I

1 CONTENTS

2 Taylorreihen

2.1 Taylorpolynom

Gegeben: Funktion $f(x)$, Ordnung N, Entwicklungszentrum x_0

1. Ableitungen von f(x) bis N berechnen

$$f(x) = \sin(2x), \quad N = 6, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$f^{(1)}(x) = 2\cos(2x) \quad | \quad f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) = -2$$

$$f^{(2)}(x) = -4\sin(2x) \quad | \quad f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\sin(\pi) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x) \quad | \quad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos(\pi) - 8$$

$$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) \quad | \quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\sin(\pi) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 32\cos(2x) \quad | \quad f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 32\cos(\pi) =$$

$$f^{(6)}(x) = -64\sin(x) \quad | \quad f^{(6)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -64\sin(\pi) = 0$$

2. Mit Formel aus Formelsammlung zusammensetzen

$$f_6(x) = \frac{\sin(\pi)}{1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0 + \frac{-2}{1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{8}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\overset{-32}{\cancel{-32}}}{120}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 =$$

$$\underline{\underline{-2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}}$$

2.2 FEHLERABSCHÄTZUNG

Gegeben: Funktion $f(x)$, Ordnung N, Intervall $[a;\ b]$

Je grösser N, desto kleiner ist der Fehler

1. Ableitung $N+1$ berechnen

$$f(x) = \sin(2x), \quad N=6, \quad [0; \pi]$$

$$f^{(7)}(x) = -128\cos(2x)$$

2. m berechnen/abschätzen

$$f^{(7)}(0) = -128\cos(0) = -128$$

$$f^{(7)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -128\cos(\pi) = 128$$

$$f^{(7)}(\pi) = -128\cos(2\pi) = -128$$

$$m \geq |f^{(7)}(x)| \quad (FS)$$

wir wählen daher $m = 128$

3. Maximalen Fehler berchnen

$$\frac{m(b-a)^{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} \quad (FS) \quad =$$

$$\frac{128(\pi-0)^7}{2^7 \cdot 7!} = \frac{2^7 \cdot \pi^7}{2^2 \cdot 7!} = \underline{\underline{\frac{\pi^7}{7!}}}$$

Mit dieser Methode kann auch er minimale Grad berechnet werden, indem man m bestimmt und dann mit verschiedenen N ausprobiert beim Fehler berechnen

2.3 Linearisierung um x_0 mit maximalem Rechenfehler

Gegeben: Funktion f(x), Entwicklungspunkt x_0, maximaler Rechenfehler Δ

Gesucht: Intervall [a; b]

$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad x_0 = 0, \quad \Delta = 0{,}05$$

1. Zweimal ableiten

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + e^{\sin(x)} \cdot (-\sin(x))$$

$$= e^{\sin(x)} \cdot (\cos^2(x) - \sin(x))$$

2. Linearisieren

$$L(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = e^{\sin(0)} \cdot \cos(0) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$f(x_0) = e^{\sin(0)} = 1$$

$$L(x) = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$$

3. M bestimmen

$$|f''(x_0)| \leq m \quad (FS)$$

$$f''(x_0) = e^{\sin(0)} \cdot (\cos^2(0) - \sin(0) = e^0(1-0) = 1$$

$$1 \leq m \longrightarrow \text{z.B. } m = 2$$

4. Intervall berechnen

$$\left[x_0 - \sqrt{\frac{2\Delta}{m}}; x_0 + \sqrt{\frac{2\Delta}{m}}\right] = \left[-\sqrt{\frac{0{,}1}{2}}; \sqrt{\frac{0{,}1}{2}}\right] = \left[-\sqrt{\frac{1}{20}}; \sqrt{\frac{1}{20}}\right]$$

5. Kontrolle, ob Funktion bei Maximalwert noch kleiner als m ist

$$|f''(x)| \leq m \quad (FS)$$

$$f''\left(\sqrt{\tfrac{1}{20}}\right) = e^{\sin\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\right)} \cdot \left(\cos^2\left(\sqrt{\tfrac{1}{20}}\right) - \sin\left(\sqrt{\tfrac{1}{20}}\right)\right) \approx e^{0,1} \cdot$$

$$(0{,}8 - 0{,}1) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}35 \quad \underline{\underline{ok \leq 2}}$$

3 Grenzwerte

Mit dem Limes bezeichnet man, was passiert, wenn der Parameter der Funktion gegen ∞, −∞ oder eine Zahl geht.

Wenn nach dem Limes an einer unstetigen Stelle gefragt wird, existiert er nicht. Er kann jedoch mit der stetigen Fortsetzung bestimmt werden, wenn dies möglich ist.

3.1 Im Undendlichen

a) $f(x) = x^2$: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

b) $f(x) = x^3$: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

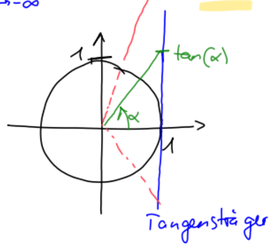
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

g) $f(x) = \arctan(x)$: $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$



d) $f(x) = \frac{1'000'000}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1'000'000}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1'000'000}{x} = 0$

e) $f(x) = \cos(x)$: $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)$ existiert nicht

$\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(x)$ existiert nicht

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

h) $f(x) = \frac{4x^3-10x}{2x^3+3x^2}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-10x}{2x^3+3x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-\frac{10}{x^2}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4-0}{2+0} = \underline{\underline{2}}$

($\frac{10}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$)

Analog: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \underline{2}$

3.2 Im Endlichen

$\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-3}{x+1} = \frac{2^2-3}{2+1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-3}{x+1}$ existiert nicht

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim\limits_{x\to-1} (x-1) = \underline{\underline{-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x \cdot \frac{x^4+3x}{x^3-1}\right) = \left(\lim\limits_{x\to\infty} e^x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}\right)$

$1 - 0$

$= \infty \cdot \infty$

$= \underline{\underline{\infty}}$

f) $\lim\limits_{x\to0-} \left(\frac{1}{x} \cdot e^{\frac{x-1}{x}}\right) = \left(\lim\limits_{x\to0-} \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to0-} e^{\boxed{\frac{x-1}{x}}}\right)$

$\to \frac{-1}{0-} = \infty$

$= -\infty \cdot \infty = \underline{\underline{-\infty}}$

Bsp $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ $\qquad \infty-\infty$

Trick: Erweitern $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$

3. Bin. Formel $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}\sqrt{x^2+4x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0}}+1} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

Taylorreihe von $\cos(x)$ um $x_0=0$

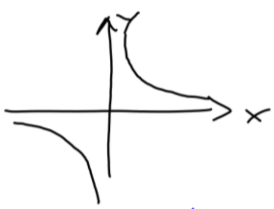
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{4!}\cdot x^4-+\ldots\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+-\ldots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\underbrace{x^2}_{\to 0}+\frac{1}{6!}\underbrace{x^6}_{\downarrow}-+\underbrace{\ldots}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2!} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3.3 Einseitige Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ existiert nicht



$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0+} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0-} = -\infty$

(rechtsseitiger Grenzwert) (linksseitiger Grenzwert)

3.4 Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to q}\left(c\cdot f(x)\right) &= c\cdot\lim_{x\to q} f(x)\,,\ \textit{für}\ c\in\mathbb{R}\\
\lim_{x\to q}\left(f(x)+g(x)\right) &= \lim_{x\to q} f(x)+\lim_{x\to q} g(x)\\
\lim_{x\to q}\left(f(x)\cdot g(x)\right) &= \lim_{x\to q} f(x)\cdot\lim_{x\to q} g(x)\\
\lim_{x\to q}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\lim_{x\to q} f(x)}{\lim_{x\to q} g(x)},\ \textit{falls}\ \lim_{x\to q} g(x)\neq 0\\
\lim_{x\to q}\left(f(x)^{g(x)}\right) &= \left(\lim_{x\to q} f(x)\right)^{\lim_{x\to q} g(x)},\ \textit{falls}\ \lim_{x\to q} f(x)>0
\end{aligned}$$

3.5 Regel von Bernoulli und Hopital

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

falls Typ $\boxed{\frac{0}{0}}$ oder $\boxed{\frac{\infty}{\pm\infty}}$, und Grenzwert auf rechter Seite existiert.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \boxed{\infty\cdot 0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-1/2}} \qquad \frac{0}{0}$$

$\rightsquigarrow$ Bernoulli, l'Hospital

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^{3/2}}{\frac{1}{2}\cdot x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

4 LINEARE REGRESSION

Gegeben: Wertetabelle mit x/y Daten oder Graph

Gesucht: Modellfunktion, das ist ein Polynom eines gewissen Grades, das den ursprünglichen Graphen möglich gut repräsentiert, also der Gesamtfehler möglichst klein ist

Wenn es eine vertikale Linie (Grad N=0) werden soll, ist es einfach der Durchschnitt der y-Werte

4.1 GRAD 1 (WÜRDE ABER AUCH FÜR HÖHERE GRADE GEHEN)

Gegeben:

x_i	0	3	5
y_i	80	90	105

Gesucht: Funktion in der Form $f(x) = m * x + b$, bzw. $f(x) = \lambda_0 * 1 + \lambda_1 * x$

1. Gleichung zum Gesamtfehler aufstellen

$$RSS = \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_i) - y_i)^2$$
$$= (m \cdot 0 + b - 80)^2 + (m \cdot 3 + b - 90)^2 + (m \cdot 5 + b - 105)^2$$
$$= (b-80)^2 + (3m + b - 90)^2 + (5m + b - 105)^2$$

2. Nach m ableiten

$$2(b-80) \cdot 0 + 2(3m + b - 90) \cdot 3 + 2(5m + b - 105) \cdot 5 =$$
$$6(3m + b - 90) + 10(5m + b - 105) =$$
$$18m + 6b - 540 + 50m + 10b - 1050 =$$
$$68m + 16b - 1590 = 0 \longrightarrow 34m + 8b - 795 = 0$$

3. Nach b ableiten

$$2(b-80) \cdot 1 + 2(3m + b - 90) \cdot 1 + 2(5m + b - 105) \cdot 1 =$$
$$2b - 160 + 6m + 2b - 180 + 10m + 2b - 210 =$$
$$16m + 6b - 550 = 0 \longrightarrow 8m + 3b - 275 = 0$$

4. Gleichungssystem lösen

$$\begin{array}{rl} 34m + 8b - 795 = 0 & \mid \cdot 3 \\ + \; 8m + 3b - 275 = 0 & \mid \cdot (-8) \\ \hline 38m - 185 = 0 & \\ m = \frac{185}{38} & \end{array}$$

$$b = \frac{275 - 8m}{3} = \frac{275 - 8\left(\frac{185}{38}\right)}{3} = \frac{1495}{19}$$

$$f(x) = \frac{185}{38} x + \frac{1495}{19}$$

4.2 Gleiches Ergebnis mit Formel aus Formelsammlung

Gegeben:

x_i	0	3	5
y_i	80	90	105

Gesucht: Funktion in der Form $f(x) = m * x + b$, bzw. $f(x) = \lambda_0 * 1 + \lambda_1 * x$

1. Designmatrix B definieren

x_i	$b_0 = 1$	$b_1 = x$	y_i
0	1	0	80
3	1	3	90
5	1	5	105

$$\longrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Gleichung aus Formelsammlung anwenden

$$B^T \cdot B \cdot \vec{\lambda} = B^T \cdot \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 & 1\cdot0 + 1\cdot3 + 1\cdot5 \\ 0\cdot1 + 3\cdot1 + 5\cdot1 & 0\cdot0 + 3\cdot3 + 5\cdot5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot80 + 1\cdot90 + 1\cdot105 \\ 0\cdot80 + 3\cdot90 + 5\cdot105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 795 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 275 \\ 8 & 34 & 795 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & 64 & 2200 \\ 24 & 102 & 2385 \end{array}\right) -Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & 64 & 2200 \\ 0 & 38 & 185 \end{array}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{185}{38}$$

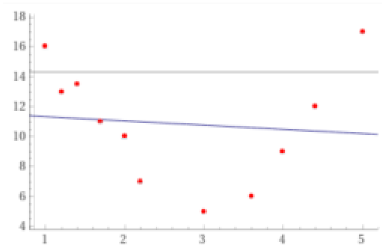
$$24\lambda_0 + 64\lambda_1 = 2200 \quad |:8$$

$$3\lambda_0 + 8\lambda_1 = 275$$

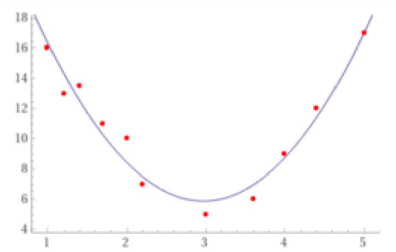
$$\lambda_0 = \frac{275 - 8\lambda_1}{3} = \frac{1495}{19}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{185}{38}x + \frac{1495}{19}}}$$

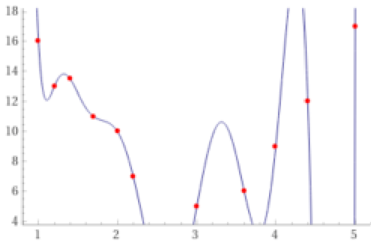
4.3 PASSENDEN GRAD DER MODELLFUNKTION



"Underfitting"
zu wenige Konfigurations-parameter



sinnvoll,
Vorhersage / Generalisierung möglich



"Overfitting"
Daten werden auswendig gelernt,
keine Vorhersage möglich.

Definitiv overfitted, wenn der Grad gleich gross ist wie die Anzahl Datenpunkte

Definitiv underfitted, wenn z.B. bei etwa quadratischer Funktion der Grad=0 gewählt wird

5 INTEGRIEREN

Eine Funktion F(x), deren Ableitung gleich f(x) ist, heisst Stammfunktion von f.

$f(x) = x^7 \quad , \quad F(x) = \frac{1}{8} x^8$

$g(x) = e^x \quad , \quad G(x) = e^x$

$h(x) = \sin(x) \quad , \quad H(x) = -\cos(x)$

$a(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad A(x) = \ln(|x|)$

$b(t) = 3\cos(t) - 2 \quad , \quad B(t) = 3\sin(t) - 2t$

$f(t) = 7ax + 2t \quad , \quad F(t) = 7axt + t^2$

$g(x) = e^{2x} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

5.1 UNBESTIMMTE INTEGRALE

Es gibt immer unendliche viele unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) einer Funktion, weil alle möglichen Konstanten der Stammfunktion angehängt sein können, jedoch zu 0 abgleitet werden. Man kann alle mit «+c» zusammenfassen.

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c}$$

$= \text{Menge aller Stammfunktionen}$

$= \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$

$= \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$

$\int 6x \, dx = 3x^2 + c$

$\int (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x + c$

$\int (e^x - \sin(x))\, dx = e^x + \cos(x) + c$

$\int \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\ln(|x|) + c \qquad = \frac{1}{2}\ln(|2x|) + C$

$\int \cos(5t) \cdot 5 \, dt = \sin(5t) + c$

$\int \cos(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)\, dx = \sin(x^2 + 3x) + c$

Linearitätsregel:

$$\int \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) dx = \alpha \cdot \int f(x)\, dx + \beta \cdot \int g(x)\, dx$$

5.1.1 Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

Spezialfälle der Substitutionsregel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \ln(|f(x)|) + c$$

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} \cdot f(x)^{n+1} + c$$

5.1.1.1 Partielle Integration

$$\int \underset{\uparrow}{\cos(x)} \cdot \underset{\downarrow}{x}\, dx = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1\, dx$$

$$= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x)\, dx$$

$$= \sin(x) \cdot x - (-\cos(x)) + c$$

$$= \underline{\underline{\sin(x) \cdot x + \cos(x) + c}}$$

Faustregeln:

- $\ln(x)$ immer Ableiten
- x, Polynome ableiten, ausser es kommt ein $\ln(x)$ vor
- e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$ egal, ob ableiten oder integrieren

5.2 Bestimmte Integrale

obere Integrationsgrenze

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}}\, dx = F(b) - F(a)$$

untere Integrationsgrenze

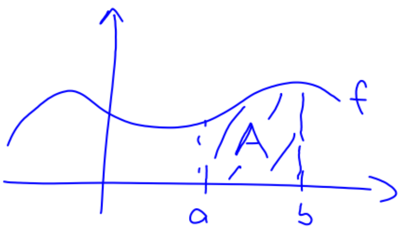
$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b}$$

$$\frac{d}{dx}\Bigg(\underbrace{\int_{-7}^{x} \left(\cos(3t) - \sqrt{5t+1}\right) dt}_{\text{Integralfunktion}}\Bigg) = \cos(3x) - \sqrt{5x+1}$$

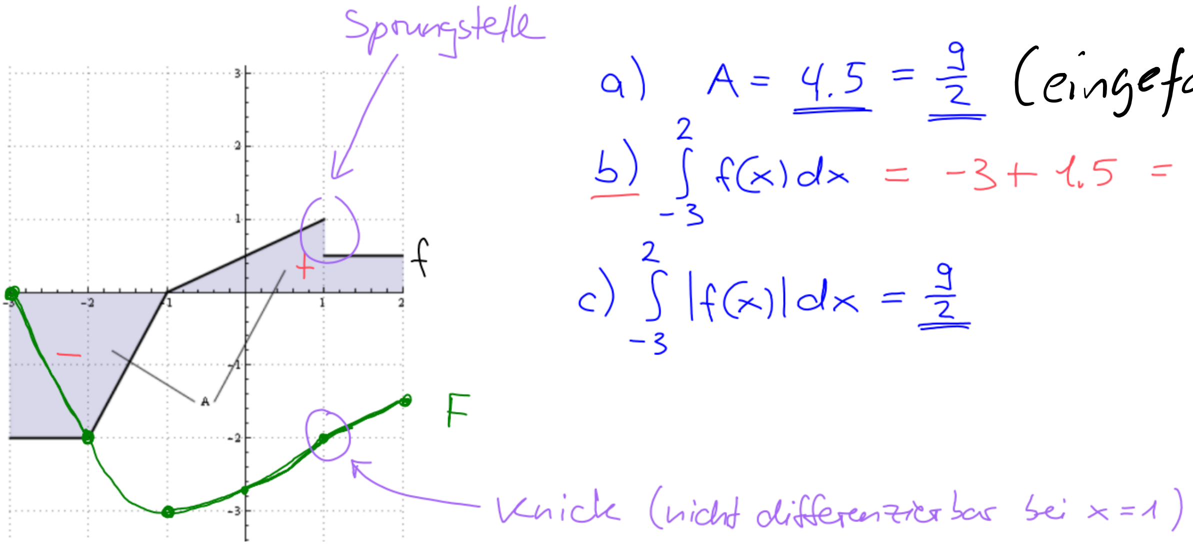
5.2.1 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[F(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

5.2.2 Als Fläche



$$\boxed{\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}}$$



a) $A = \underline{\underline{4.5}} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$ (eingefärbte Fläche)

b) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = -3 + 1.5 = \underline{\underline{-1.5}} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

c) $\int_{-3}^{2} |f(x)|\,dx = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$

$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$

$F(-3) = \int_{-3}^{-3} f(t)\,dt = 0$

$F(-2) = \int_{-3}^{-2} f(t)\,dt = \int_{-3}^{-2} (-2)\,dt = \Big[-2t\Big]_{-3}^{-2} = 4 - 6 = -2$

$F(-1) = \int_{-3}^{-1} f(t)\,dt = -3$

$F(0) = -3 + \frac{1}{4} = -2.75$

$F(1) = -2$

$F(2) = -1.5 = -\frac{3}{2}$

Graph von $f(x)$ wird

- um 3 nach rechts verschoben $\rightsquigarrow g(x) = f(x-3)$
- um 7 nach links verschoben $\rightsquigarrow g(x) = f(x+7)$
- um 4 nach oben verschoben $\rightsquigarrow g(x) = f(x) + 4$
- um Faktor 5 in y-Richtung gestreckt $\rightsquigarrow g(x) = 5 \cdot f(x)$
- um Faktor 2 in x-Richtung gestreckt $\rightsquigarrow g(x) = f(\frac{1}{2}x) = f(\frac{x}{2})$

6 Fourierreihen

Eine Funktion f heisst periodisch, wenn es eine Zahl $T > 0$ gibt, so dass $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Zahl T heisst Periode von f.

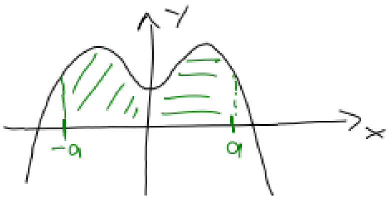
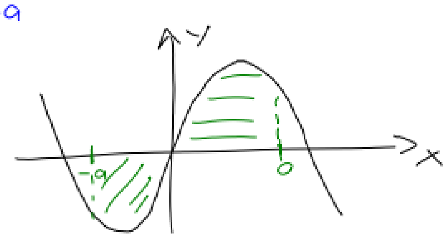
Die kleinste Zahl T mit f(x+T) = f(x) für alle $x\epsilon\mathbb{R}$ heisst primitive Periode.

Grundkreifrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, primitive Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- $\cos(5x)$ $\quad T = \frac{2\pi}{5}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5$
- $\sin(2t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(2t)$ $\quad T = \pi$, $\omega = 2$
- $\cos(2t) + \sin(4t)$ $\quad T = \pi$, $\omega = 2$

  $\pi, 2\pi, 3\pi, ..$ $\quad \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, ...$
- $7 \cdot \sin(4t) + 2 \cdot \cos(6t)$ $\quad T = \pi$, $\omega = 2$

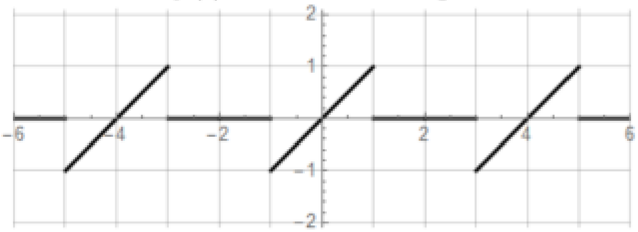
  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, ...$ $\quad \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, ...$
- $\sin(1.3t) + 2$ $\quad T = \frac{2\pi}{1.3}$, $\omega = 1.3$

	gerade Funktionen	ungerade Funktionen
Definition	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
graphisch	Graph ist achsensymm. zur y-Achse	Graph ist punktsymm. zum Ursprung
Beispiele	$f(x) = \cos(x)$ $f(x) = x^4$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ $f(x) = x^4 \cdot \cos(x)$ $f(x) = x^5 \cdot \sin(x)$ gerade · gerade ungerade · ungerade	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = x^5$, $f(x) = \frac{1}{x^5}$ $f(x) = x^4 \cdot \sin(x)$ $f(x) = x^5 \cdot \cos(x)$ gerade · ungerade ungerade · gerade
Integral-Trick	$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$  	$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ 

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ gerade} &\Longrightarrow b_k = 0 \\ f \text{ ungerade} &\Longrightarrow a_k = 0 \end{aligned}}$$

6.1 Beispiel

Aufgabe *(Bitte dokumentieren Sie Ihre Überlegungen auf einem separaten Blatt)*:
Die Funktion $g(t)$ sei durch den folgenden Funktionsgraphen gegeben:



(a) Welche Periode hat die Funktion $g(t)$?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ordnung 4 des Signals in der Sinus-Kosinus-Form.

a) $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

b) ungerade $\rightarrow$ $a_0 = a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \sin(k\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot\sin(k\omega t) = \frac{4}{4}\int_0^{4/2} f(t)\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\,dt + \int_1^2 0\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\,dt = \int_0^1 t\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\,dt =$$

$$\left[\frac{-2}{k\cdot\pi}\cdot\cos(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\cdot t\right]_{t=0}^{1} - \int_0^1 \frac{-2}{k\pi}\cdot\cos(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\cdot 1\,dt =$$

$$\left(\frac{-2}{k\cdot\pi}\cdot\cos(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot 1)\right) - \left[\frac{-4}{k^2\pi^2}\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot t)\right]_{t=0}^{1} =$$

$$\frac{-2\cdot\cos(\frac{k\cdot\pi}{2})}{k\cdot\pi} - \left(\frac{-4}{k^2\pi^2}\cdot\sin(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot 1)\right) =$$

$$\underline{\underline{\frac{4\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2} - \frac{2\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)}{k\pi}}}$$

$$b_1 = \frac{4\sin(\frac{\pi}{2})}{1^2\pi^2} - \frac{2\cos(\frac{\pi}{2})}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$b_2 = \frac{4\sin(\pi)}{4\pi^2} - \frac{2\cos(\pi)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$b_3 = \frac{4\sin(\frac{3\pi}{2})}{9\pi^2} - \frac{2\cos(\frac{3\pi}{2})}{3\pi} = \frac{-4}{9\pi^2}$$

$$b_4 = \frac{4\sin(2\pi)}{16\pi^2} - \frac{2\cos(2\pi)}{4\pi} = \frac{-2}{4\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$S_4(t) = \frac{4}{\pi^2}\cdot\sin(\tfrac{\pi}{2}\cdot t) + \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi t) - \frac{4}{9\pi^2}\cdot\sin(\tfrac{3\pi}{2}\cdot t) - \frac{1}{2\pi}\cdot\sin(2\pi t)$$

6.2 Satz von Dirichlet

$S_\infty(t_0) = f(t_0)$ für alle t_0, bei denen f stetig ist

$$S_\infty(t_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to t_0^-} f(t) + \lim_{t \to t_0^+} f(t)\right)$$

für alle Sprungstellen t_0 von f

6.3 Amplituden-Phasen-Form

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)\right)$$

Wenn x von sin(x) und cos(x) übereinstimmen

1. A bestimmen

$$\frac{1}{\pi} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2t)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

2. φ bestimmen

$$\begin{aligned} a &= A \cdot \cos(\varphi) \\ b &= A \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (FS) \quad \left| \begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \cos(\varphi) \to \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \sin(\varphi) \to \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right. \to \varphi = \frac{\pi}{4}$$

3. Zusammenfügen

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Wenn x von sin(x) und cos(x) nicht übereinstimmen

1. A_k bestimmen

$$4 \cdot \sin(3t) - \cos(7t)$$

$$A_1 = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

$$A_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

2. φ_k bestimmen

$$a_1 = A_1 \cdot \cos(\varphi_1) \quad \Big| \quad 0 = 4 \cdot \cos(\varphi_1) \quad \Big| \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$b_1 = A_1 \cdot \sin(\varphi_1) \quad \Big| \quad 4 = 4 \cdot \sin(\varphi_1)$$

$$a_2 = A_2 \cdot \cos(\varphi_2) \quad \Big| \quad -1 = 1 \cdot \cos(\varphi_2) \quad \Big| \quad \varphi_2 = \pi$$
$$b_2 = A_2 \cdot \sin(\varphi_2) \quad \Big| \quad 0 = 1 \cdot \sin(\varphi_2)$$

3. Zusammenfügen

$$\underline{\underline{f(t) = 4 \cdot \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(7t - \pi)}}$$

Das Ganze kann analog auch mit sin() statt cos() gemacht werden, dann wäre es

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k * \sin\left(k \cdot \omega_1 \cdot t + \delta_k\right)$$